ケプラーの法則と万有引力

瀬戸　悟

概 要

ヨハネス・ケプラー (1571-1630) は，ティコ・ブラーエ (1546-1601) の膨大で正確な天体観測結果をもとに惑星の運動に関して 3 つの法則にまとめた。その観測結果の中で火星の運動が真円からわずかにずれた楕円であることも明かになった。またアイザック・ニュートン (1642-1727) は，この楕円軌道を描く惑星にはどのような力が作用しているのかを解決し，逆にこの力の存在を仮定すれば，ケプラーの法則が導かれることを彼の著書 ”**自然哲学の数学的原理（プリンキピア）**” で示した。

【ケプラーの 3 法則】

- 第 1 法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く。

$$r = \frac{l}{1+\epsilon\cos\theta} \quad (0 \le \epsilon < 1,\ \epsilon = 0 \text{ は円}) : \text{楕円の極座標表示} \tag{1}$$

  ここで a, b はそれぞれ楕円の長軸と短軸であり，$l \equiv b^2/a$ を半直弦という。

- 第 2 法則：惑星が太陽のまわりに描く面積速度は，各惑星毎に一定である。

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = A\ (\text{一定}) \tag{2}$$

- 第 3 法則：惑星の公転周期 T の 2 乗は，楕円の長軸の長さ a の 3 乗に比例する。

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{一定} \tag{3}$$

【ケプラーの法則から惑星に働く力が万有引力が導かれること】

この節ではケプラーの法則から万有引力の法則を導く。すなわち楕円軌道を描くような惑星にはどのような力が働いているかをケプラーの法則から，それが r^2 に反比例し，重さ m に比例する万有引力であることを導く。

第 1 法則から惑星の運動はある面に制限された運動である。その面に対して惑星の運動方程式を極座標表示すると

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = F_r \tag{4}$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta \tag{5}$$

となる。

面積速度一定の第 2 法則 (2) $\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}=A$ より $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{2A}{r^2}$ を (4) 式に代入すると

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{4A^2}{r^3}\right)=F_r \tag{6}$$

一方，楕円の方程式 (1) より $l/r=1+\epsilon\cos\theta$ の両辺を t で微分すると $\dfrac{l}{r^2}\dfrac{dr}{dt}=\epsilon\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta$ がえられるので，$r^2\dfrac{d\theta}{dt}=2A$ の関係を使って $\dfrac{d\theta}{dt}$ を消去すると

$$\frac{dr}{dt}=\frac{2\epsilon A\sin\theta}{l}$$

上式をさらに t で微分して $\frac{d\theta}{dt}$ を消去すると

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{2\epsilon A\cos\theta}{l}\frac{d\theta}{dt}=\frac{4\epsilon A^2}{lr^2}\cos\theta \tag{7}$$

ここで楕円の方程式 (1) より $\cos\theta=\dfrac{1}{\epsilon}\left(\dfrac{l}{r}-1\right)$ を (7) 式に代入すると

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{4\epsilon A^2}{lr^2}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{l}{r}-1\right)=\frac{4A^2}{r^3}-\frac{4A^2}{lr^2} \tag{8}$$

となる。したがって (8) 式を (6) 式に代入すれば

$$m\left(\frac{4A^2}{r^3}-\frac{4A^2}{lr^2}-\frac{4A^2}{r^3}\right)=-\left(\frac{4A^2}{l}\right)\frac{m}{r^2}=-C\frac{m}{r^2}=F_r \tag{9}$$

すなわち，惑星に働く力 F_r は m に比例し，r^2 に反比例する，万有引力の性質を持つことが導かれた。ここで

$$C=\frac{4A^2}{l}=GM \tag{10}$$

でなければならない。(G:万有引力定数，M：太陽の質量)

【万有引力を仮定すればケプラーの法則が導かれること】

ここでは逆に万有引力場を仮定すれば，ケプラーの 3 法則が導かれることを確認する。話の順序として，まず簡単な第 2 法則と第 3 法則を先に導き，最後に第 1 法則を導くことにする。

0.1　第 2 法則

万有引力は中心に向かう力，中心力だから惑星の運動の角運動量 $\boldsymbol{L}$ は保存する。すなわち角運動量はその方向が惑星の軌道面に垂直な z 方向の成分しかなく，その大きさは極座標で表すと

$$\begin{aligned} L_z &= m(xv_y - yv_x) \\ &= mr\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\right) - mr\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\right) \\ &= mr^2\frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \tag{11}$$

となる。したがって角運動量が一定は

$$L_z = mr^2\frac{d\theta}{dt} = D$$

と書ける。一方，面積速度は $\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}$ であったので

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_z}{2m} = \frac{D}{2m} = \text{一定} \tag{12}$$

となり，第 2 法則が導かれた。

0.2　第 3 法則

惑星の楕円軌道の長軸 a と短軸 b はそれぞれ

$$a = \frac{b^2}{a}\cdot\frac{a^2}{b^2} = \frac{l}{1-\epsilon^2}\,, \qquad b = \frac{b^2}{a}\cdot\frac{a}{b} = \frac{l}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

と表される。惑星の公転周期 T は楕円の面積 S を (2) 式の面積速度 A で割った時間であるから

$$S = \pi ab = \frac{\pi l^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} \tag{13}$$

より

$$T = \frac{S}{A} = \frac{\pi l^2}{A(1-\epsilon^2)^{3/2}} \tag{14}$$

この指揮の両辺を 2 乗すると

$$T^2 = \frac{\pi^2 l}{A^2}\left(\frac{l}{1-\epsilon^2}\right)^3 = \frac{\pi^2 l a^3}{A^2}$$

となる。ゆえに

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2}{A^2} = \frac{4\pi^2}{C} \tag{15}$$

となり，ケプラーの第 3 法則が証明された。

0.3　第 1 法則

質量 M の質点 (太陽を想定すればよい) から質量 m の質点（地球を想定すればよい）におよぼす万有引力ポテンシャル U は

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

であるから，質点 m の力学的全エネルギー E は，m の速度を $\boldsymbol{v}$ とすると極座標では $\boldsymbol{v}^2$ は

$$\boldsymbol{v}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

なので全エネルギー E は

$$\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} - -\frac{GMm}{r} = E \tag{16}$$

また角運動量一定から

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = 2mA = L_Z = 一定 \tag{17}$$

から $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{L_z}{mr^2}$ となるので，これを (16) 式に代入すると

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + m\left(\frac{L_z^2}{2m^2r^2} - \frac{GM}{r}\right) = E \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{eff}(r) = E \tag{19}$$

となる。ここで

$$U_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GM}{r} \tag{20}$$

は r 方向の実効的ポテンシャルで，右辺第 1 項は**遠心力ポテンシャル**という。

以上の準備をもとにいよいよ惑星の軌道を極座標で求める。まず $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ と $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{L_z}{mr^2}$ を用いると (18) 式は

$$L_z\left(\frac{dr}{dt}\right)=m^2r^4\left(\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}-\frac{L_z^2}{m^2r^2}\right)$$

となり

$$\frac{dr}{dt}=\pm\frac{mr^2}{L_z}\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}-\frac{L_z^2}{m^2r^2}}$$

ここで $z=1/r$ とおくと $\dfrac{dz}{d\theta}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\theta}&=\mp\frac{m}{L_z}\sqrt{\frac{2E}{m}+2GMz-\frac{L_z^2z^2}{m^2}}\\&=\mp\sqrt{\frac{2Em}{L_z^2}+\frac{2GMm^2}{L_z^2}z-z^2}\\&=\mp\sqrt{\frac{2Em}{L_z^2}+\frac{G^2M^2m^4}{L_z^4}-\left(z-\frac{GMm^2}{L_z^2}\right)^2}\end{aligned}$$

さらに $u=z-\dfrac{GMm^2}{L_z^2}$ とおくと

$$d\theta=\mp\frac{du}{\sqrt{\dfrac{2Em}{L_z^2}+\dfrac{G^2M^2m^4}{L_z^4}-u^2}} \tag{21}$$

となる。積分公式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\alpha$$

を用いて (21) 式の両辺を積分すると

$$\theta=\pm\cos^{-1}\frac{u}{\sqrt{\dfrac{2Em}{L_z^2}+\dfrac{G^2M^2m^4}{L_z^4}}}+\alpha$$

となる。複合は角度を半時計回りで測るときに＋となるので，以後＋に固定する。u を z に，z をさらに r にもどすと

$$\cos(\theta+\alpha)=\frac{\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{GMm^2}{L_z^2}\right)}{\sqrt{\dfrac{2Em}{L_z^2}+\dfrac{G^2M^2m^4}{L_z^4}}}$$

これら r について書きなおすと

$$r = \frac{L_z^2/(GMm^2)}{1+\sqrt{1+\dfrac{2EL_z^2}{G^2M^2m^3}}\cdot\cos(\theta+\alpha)} \tag{22}$$

となる。ここで

$$l = \frac{L_z^2}{GMm^2}\,, \qquad \sqrt{1+\frac{2EL_z^2}{G^2M^2m^3}} = \epsilon \tag{23}$$

とおくと

$$r = \frac{l}{1+\epsilon\cos(\theta+\alpha)} \tag{24}$$

となる。$\theta = 0$ のとき，r が長軸上にくるようにすれば $\alpha = 0$ となる。したがって

$$r = \frac{l}{1+\epsilon\cos\theta} \tag{25}$$

となる。

ここで (25) 式の解の形を E と ϵ の大きさで分類する。

1. $E < -\dfrac{G^2M^2m^3}{2L_z^2}$ なら，ϵ は虚数となって，そのような運動は存在しない。
2. $E < -\dfrac{G^2M^2m^3}{2L_z^2}$ なら，$\epsilon = 0$ となって，軌道は円運動になる。
3. $-\dfrac{G^2M^2m^3}{2L_z^2} < E < 0$ なら，$0 < \epsilon < 1$ となって，軌道は楕円になる。
4. $E = 0$ なら，$\epsilon = 1$ となって，軌道は放物線になる。
5. $E > 0$ なら，$\epsilon > 1$ となって，軌道は双曲線になる。

3 がケプラーの第 1 法則に相当する。