第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.1 ダイナミカルシステム

キーワード： ダイナミカルシステム
システムの線形化

学習目標： 入出力を動的に関係づけるダイナミカルシステムとシステムの線形化の概念を理解する。

2 ダイナミカルシステムの表現

2.1 ダイナミカルシステム

ダイナミカルシステム(動的システム)

現在時刻の出力 $y(t_0)$ は入力の現在時刻の値 $u(t_0)$ だけでなく過去の履歴にも依存

静的システム

時刻 $t = t_0$ の出力 $y(t_0)$ は当該時刻の入力 $u(t_0)$ だけから一意に定まり，入力の過去の履歴 $\{u(t) : 0 \leq t < t_0\}$ に無関係

図 2.1 ダイナミカルシステム

[例 2.1] ばね系

- ばね定数 K $[\mathrm{N/m}]$
- （入力）力 $f(t)$ $[\mathrm{N}]$
- （出力）ばねの伸び $x(t)$ $[\mathrm{m}]$
- フックの法則

$$x(t) = \frac{1}{K} f(t)$$

$$(f(t) = Kx(t))$$

静的システム

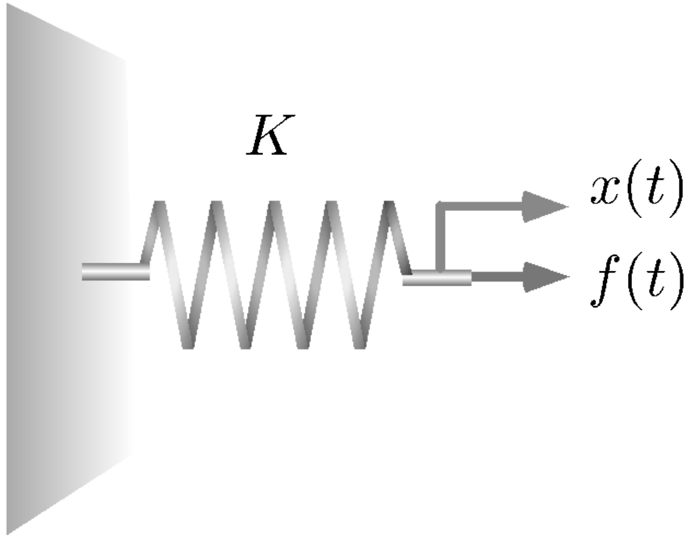


図 2.2 ばね系

[例 2.2] 質量－ばね－ダンパ系

- 質量 M [kg]
- ばね定数 K [N/m]
- (入力)力 $f(t)$ [N]
- (出力)変位 $x(t)$ [m]
- 粘性摩擦係数 D [N・s/m]

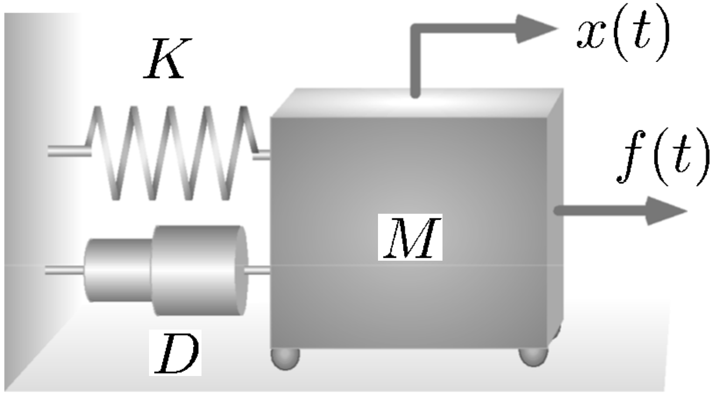


図 2.3 質量－ばね－ダンパ系

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) - Kx(t) - D\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

ダイナミカルシステム

2階の微分方程式

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

微分方程式を解くと

$$x(t) = A_1 e^{A_2 t} + B_1 e^{B_2 t}$$

初期条件から

$$A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$$

が求まる。

初期条件が，現在値 $x(t)$ に影響している。

［例 2.3］RLC 回路

$$e_o(t) = e_o(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow\ i(t) = C\frac{d(e_o(t) - e_o(0))}{dt}$$

$$\Rightarrow\ i(t) = C\frac{de_o(t)}{dt}$$

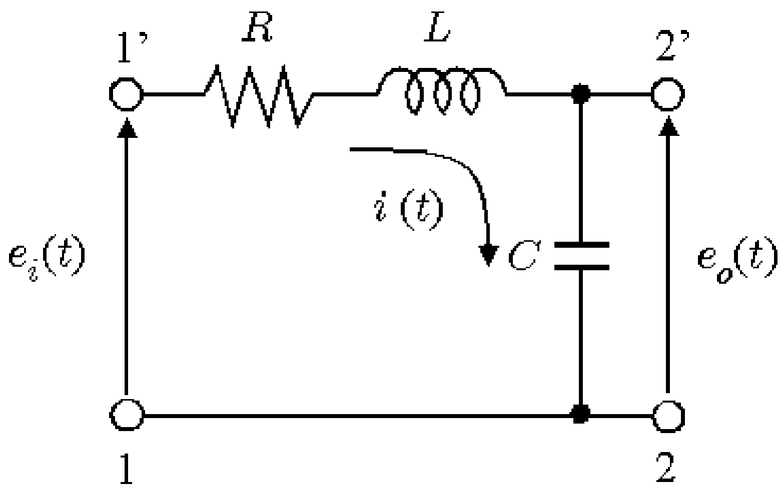


図 2.4 RLC回路

$$e_i(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e_o(t)$$

$$\Rightarrow\ e_i(t) = RC\frac{de_o}{dt} + LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2} + e_o(t)$$

$$LC\frac{d^2e_o(t)}{dt^2} + RC\frac{de_o}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$

2階の微分方程式

RLC回路と質量-ばね-ダンパ系は，記号が異なるだけで中身は同じ2階の微分方程式

ダイナミカルシステムの基本表現（微分方程式）

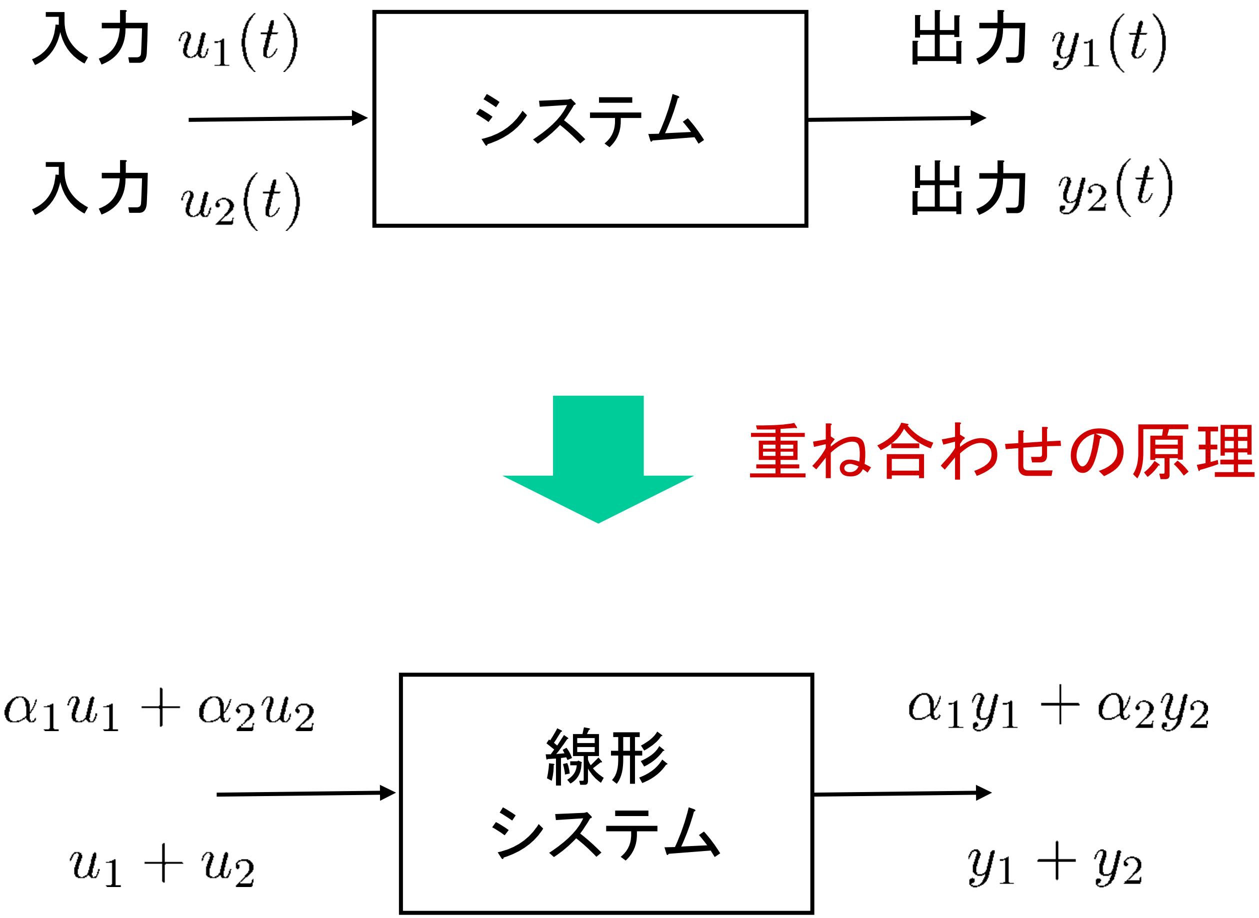
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

[例] RLC 回路

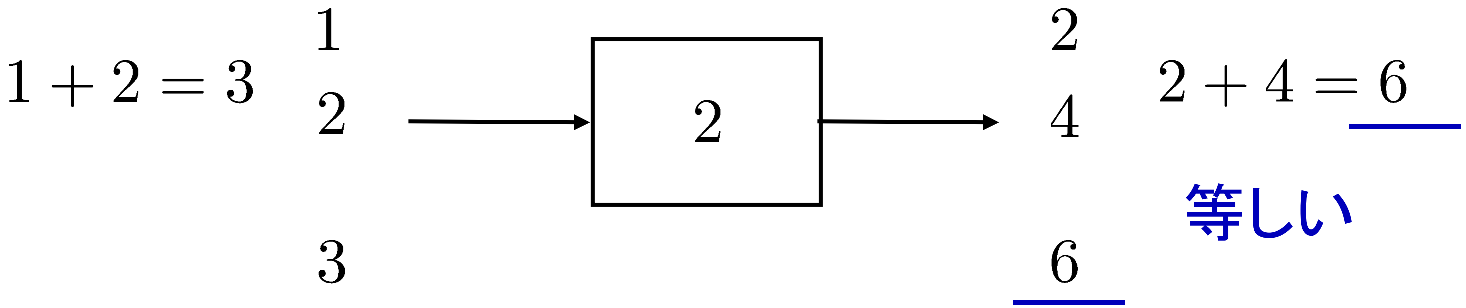
$$n = 2,\ y(t) = e_0(t),\ a_2 = LC,\ a_1 = RC, a_0 = 1$$

$$m = 0,\ u(t) = e_i(t),\ b_0 = 1$$

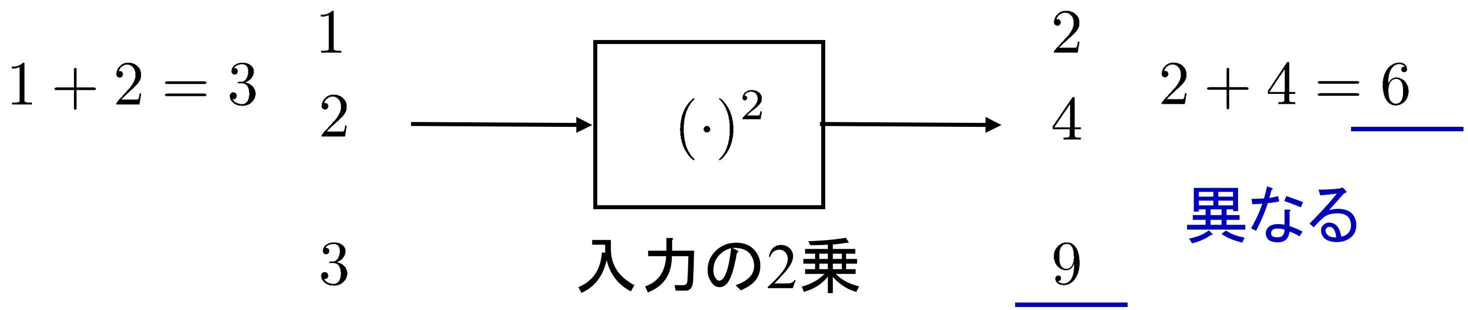
線形システム


入力 $u_1(t)$
入力 $u_2(t)$
システム
出力 $y_1(t)$
出力 $y_2(t)$
重ね合わせの原理
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$
$u_1 + u_2$
線形
システム
$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$
$y_1 + y_2$

[例] 線形の場合



[例] 非線形の場合



入力の2乗は，非線形な関数のために重ね合わせの理が成立しない

システムの線形化

[例 2.4] 水位系

$$\frac{dAh(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t)$$

$$q_o(t) = k\sqrt{h(t)}$$ （ベルヌーイの定理）

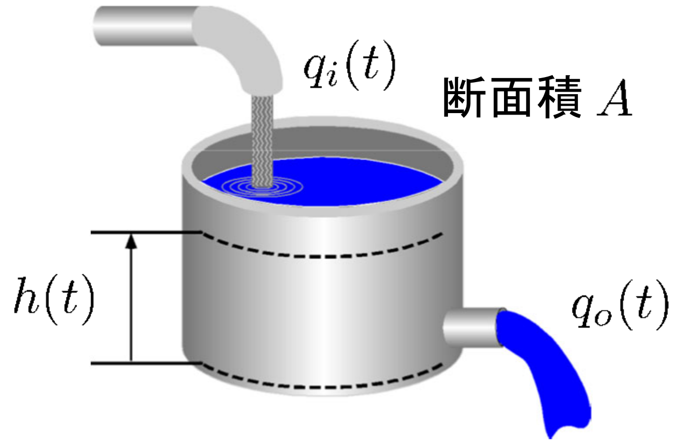


図 2.5 水位系

$$\Rightarrow \quad A\frac{dh(t)}{dt} + \underbrace{k\sqrt{h(t)}}_{\text{非線形項}} = q_i(t)$$

線形化

$$q_{o0} = q_{i0} = k\sqrt{h_0}$$

動作点からの微小変化分に着目

$$q_i(t) = q_{i0} + \delta q_i(t)$$

$$q_o(t) = q_{o0} + \delta q_o(t)$$

$$h(t) = h_0 + \delta h(t)$$

$\delta q_i(t)$: 入力

$\delta h(t)$: 出力

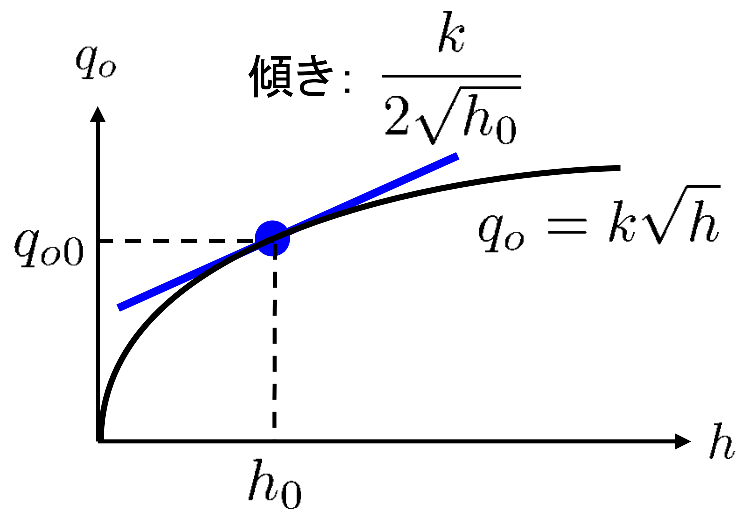


図 2.6 線形化

$$A\frac{d}{dt}(h_0+\delta h(t)) = (q_{i0}+\delta q_i(t)) - \underbrace{(q_{o0}+\delta q_o(t))}_{\text{非線形項}}$$

$$q_{o0}+\delta q_o(t) = k\sqrt{h_0+\delta h(t)} = k\sqrt{h_0}\left(1+\frac{\delta h(t)}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

テイラー展開で1次まで考える

$$\boxed{\text{テイラー展開}\quad f(x_0+x) \approx f(x_0)+f'(x_0)x}$$

$$f(\delta h(t)) = \left(1+\frac{\delta h(t)}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}},\ x_0=0,\ \ x=\delta h(t)\ \text{とおく}$$

- $f(0) = \left(1+\frac{\delta h(t)}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\delta h(t)=0} = 1$
- $f'(\delta h(t))\Big|_{\delta h(t)=0} = \frac{1}{2}\frac{1}{h_0}\left(1+\frac{\delta h(t)}{h_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{\delta h(t)=0} = \frac{1}{2h_0}$

$$
\begin{aligned}
q_{o0} + \delta q_o(t) &\approx k\sqrt{h_0}\left(1 + \frac{1}{2h_0}\delta h(t)\right) \\
&= k\sqrt{h_0} + \underline{\frac{k}{2\sqrt{h_0}}}\delta h(t)
\end{aligned}
$$

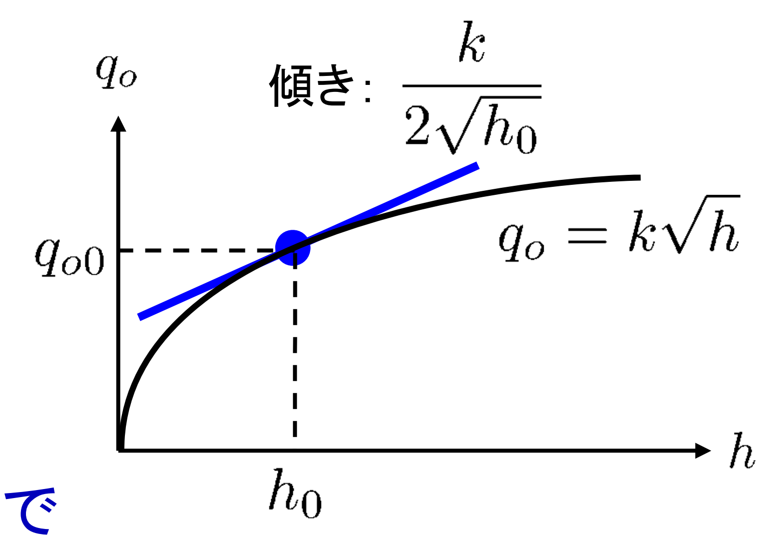


図 2.6 線形化

ルートがあるが，h_0 は定数なので

例えば $\sqrt{h_0} = 2$ という数字であるので

$$
k\sqrt{h_0} + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t) = 1 + 2\delta h(t)
$$

という線形の関数となる

水位が変動しないとき $(q_{o0} = q_{i0})$

$$
A\frac{d}{dt}\left(h_0 + \delta h(t)\right) = \left(q_{i0} + \delta q_i(t)\right) - \left(q_{o0} + \delta q_o(t)\right)
$$

$$
\underbrace{A\frac{d}{dt}\left(h_0 + \delta h(t)\right)}_{=0} = \left(q_{i0} + \underbrace{\delta q_i(t)}_{=0}\right) - \left(k\sqrt{h_0} + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\underbrace{\delta h(t)}_{=0}\right)
$$

$$
q_{i0} = k\sqrt{h_0}
$$

$$q_{i0} = q_{o0} = k\sqrt{h_0}$$

を用いて

$$A\frac{d}{dt}\left(h_0 + \delta h(t)\right) = \left(q_{i0} + \delta q_i(t)\right) - \left(k\sqrt{h_0} + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t)\right)$$

$$A\frac{d}{dt}h_0 = 0 \qquad q_{i0} = k\sqrt{h_0}$$

$$\Rightarrow \underset{A}{\underline{A}}\frac{d}{dt}\delta h(t) + \underset{\frac{k}{2\sqrt{h_0}}}{\underline{\frac{k}{2\sqrt{h_0}}}}\delta h(t) = \underset{1}{\underline{}}\delta q_i(t)$$

線形の微分方程式

係数がすべて数字（変数でない）
なので，線形

第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.1 ダイナミカルシステム

キーワード：ダイナミカルシステム
システムの線形化

学習目標：入出力を動的に関係づけるダイナミカルシステムとシステムの線形化の概念を理解する。