2019年度 制御工学 I 後期 第11回資料

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

キーワード： 過渡応答，極，零点

学習目標： 極･零点と過渡応答の関係について理解する。

1

---

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性
3.4 極･零点と過渡応答

極とインパルス応答

伝達関数 $G(s)$

実極 $\underline{-\sigma_i}(i=1\sim M)$

実部

【例】

$$G(s)=\frac{1}{s+1} \qquad \text{極} \quad \sigma=-1$$

複素共役極 $\underline{-\alpha_i} \pm j\underline{\omega_i}(i=1\sim N)$

実部　　虚部

【例】

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s+1} \qquad \text{極} \quad \frac{-1\pm j\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha=\frac{-1}{2}, \quad \omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2

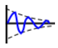
インパルス応答(ラプラス変換)

部分分数展開より

$$y(s)=G(s)=\sum_{i=1}^{M}\frac{A_i}{s+\sigma_i}+\sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{(s+\alpha_i)^2+\omega_i^2}$$

インパルス応答

$$y(t)=\sum_{i=1}^{M}\underline{A_i e^{-\sigma_i t}}+\sum_{i=1}^{N}\underline{\frac{B_i}{\omega_i}e^{-\alpha_i t}\sin\omega_i t}$$



【例】

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\left(s+\underline{\tfrac{1}{2}}\right)^2+\left(\underline{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}$$

極の実部　極の虚部

3

極の実部の大きさ: 収束の速さ

極の虚部の大きさ: 振動成分の周期

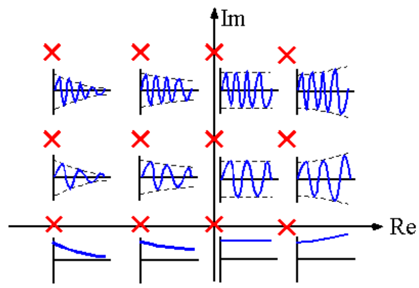


図 3.9 極の位置とインパルス応答

4

ステップ応答(ラプラス変換)

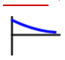
部分分数展開より

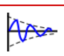
$$y(s)=G(s)\frac{1}{s}=\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{M}\frac{A_i}{s+\sigma_i}+\sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{(s+\alpha_i)^2+\omega_i^2}$$

ステップ応答

$$y(t)=\underline{A_0}+\sum_{i=1}^{M}\underline{A_i e^{-\sigma_i t}}+\sum_{i=1}^{N}\underline{\frac{B_i}{\omega_i}e^{-\alpha_i t}\sin\omega_i t}$$

ステップ入力に対応





5

過渡応答に関する特性値

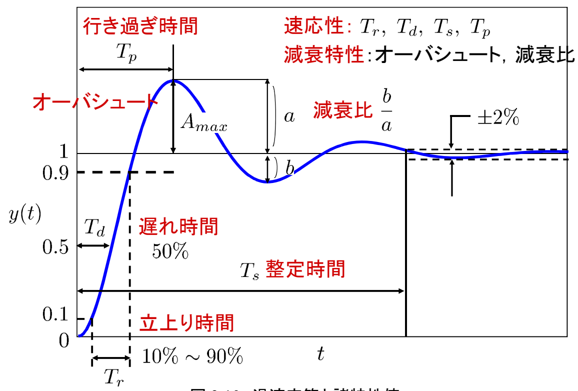
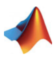


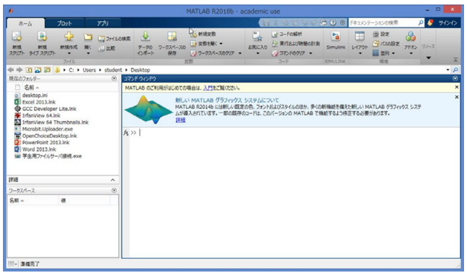
図 3.10 過渡応答と諸特性値

6

MATLAB演習

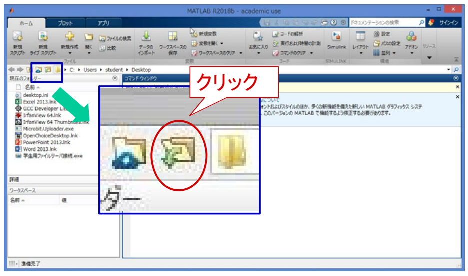
(1) MATLABの起動


をクリック

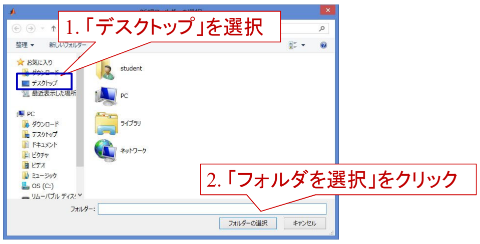


7

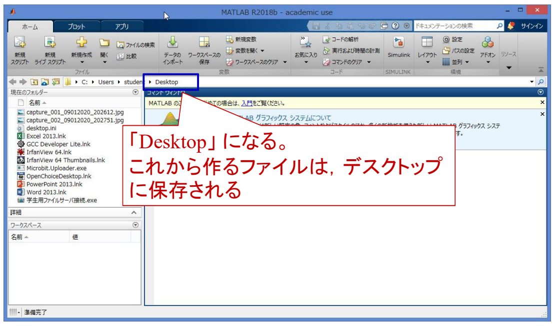
(2) カレントフォルダの設定



8

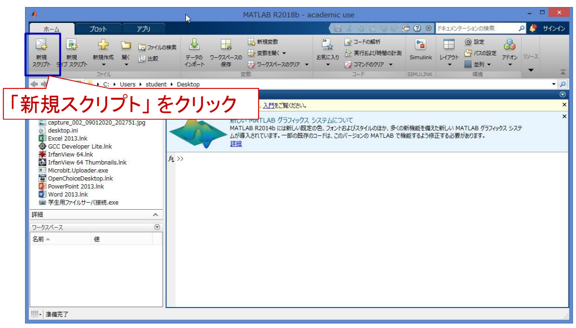


9

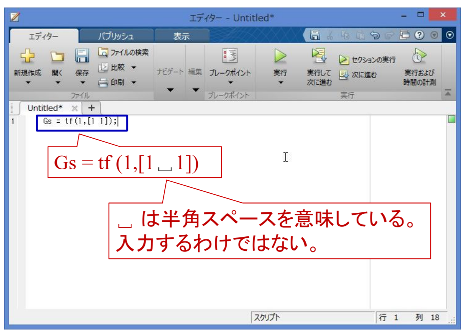


10

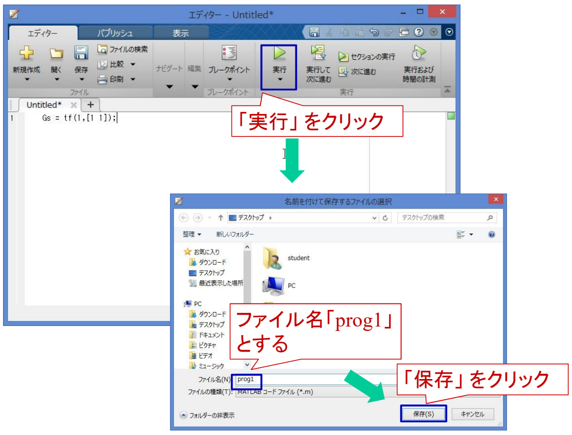
(3) m ファイルの作成



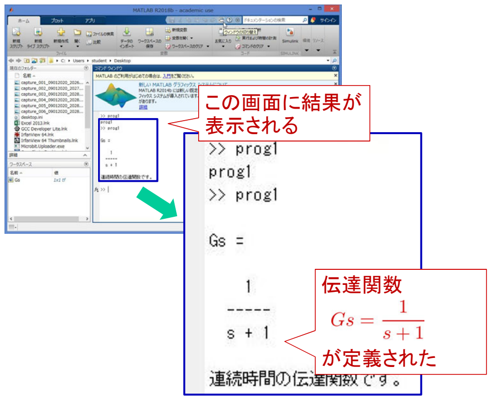
11



12



13



14

伝達関数の定義

tf (分子の係数, 分母の係数)　　Gs = tf ($\boxed{1}$,[$\boxed{1}$␣$\boxed{1}$])

【例】 $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$ ➡ $G(s) = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{1}s\boxed{+1}}$

Gs = tf (1,[1␣1])

【例】 $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+1}$

Gs = tf ([1␣1], [1␣0␣1])

【問題1】 次の伝達関数を定義するプロフラムを示せ

(1) $G(s) = \dfrac{1}{s^2+s+1}$

(2) $G(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$

15

伝達関数の演算

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)}$$ を定義するには

$$= \frac{1}{(s+1)} \times \frac{1}{0.1s+1}$$

Gs = tf ([1], [1␣1])* tf ([1], [0.1␣1])

乗算は「*」

【問題2】 次の伝達関数を定義するプロフラムを示せ

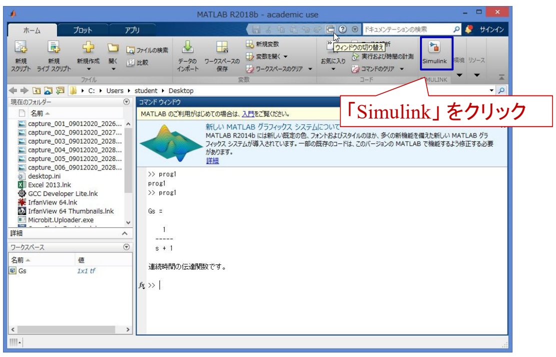
(1) $G(s) = \dfrac{1}{(2s+1)^2}$

(2) $G(s) = \dfrac{2s+10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

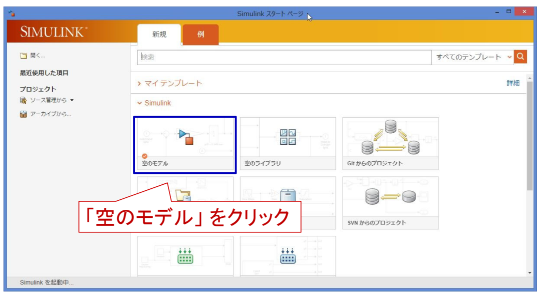
(3) $G(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

16

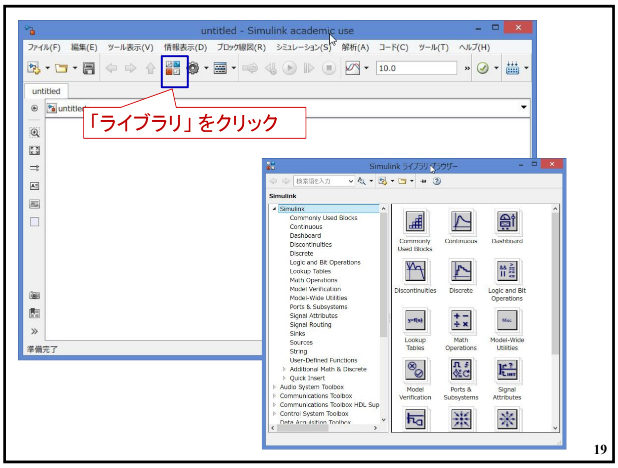
ステップ応答の計算

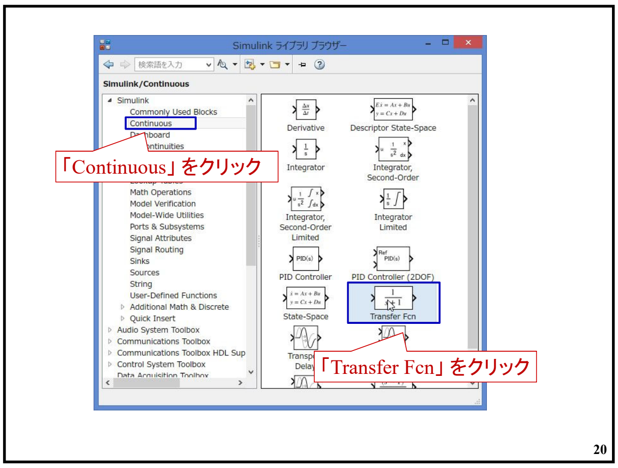


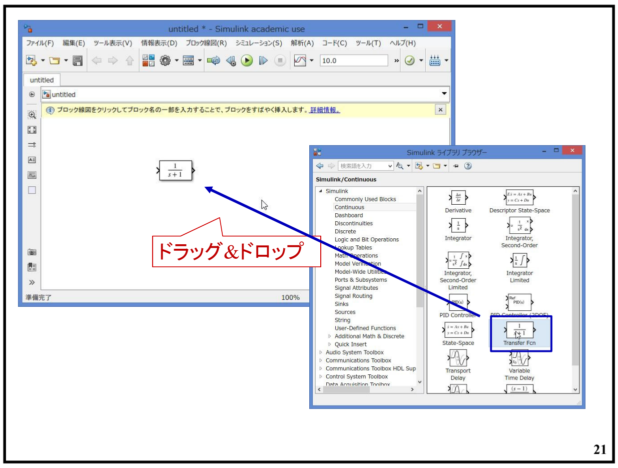
17

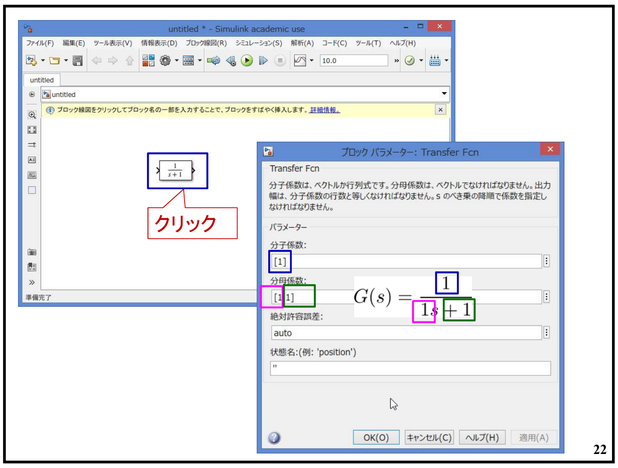


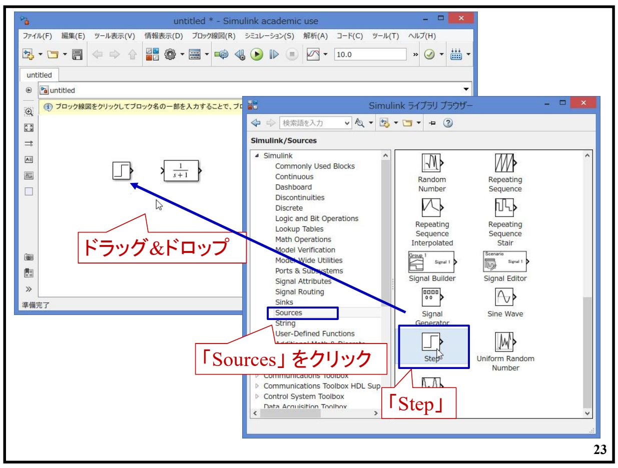
18

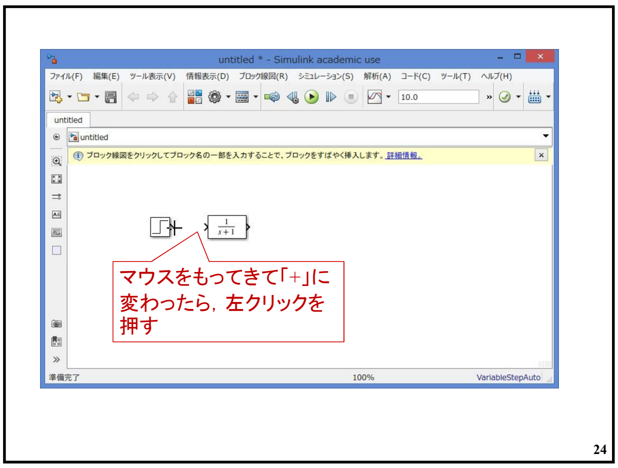

「ライブラリ」をクリック
19

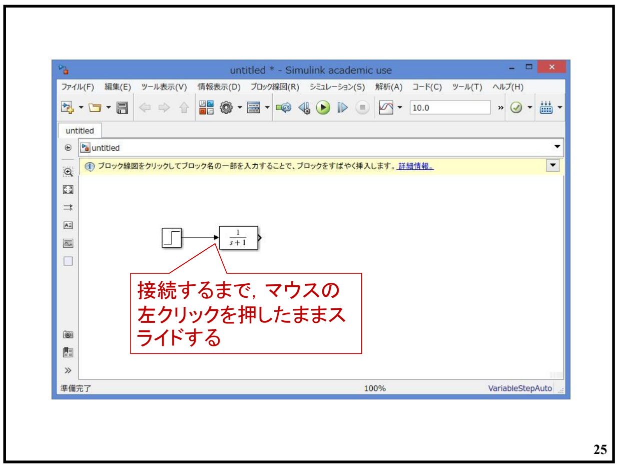

「Continuous」をクリック
「Transfer Fcn」をクリック
20

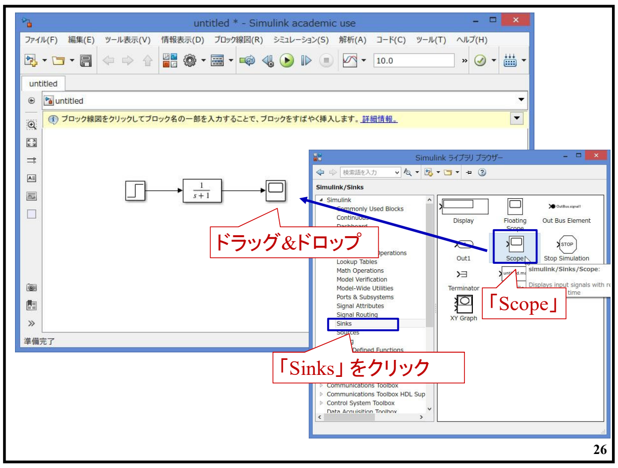

ドラッグ&ドロップ
21

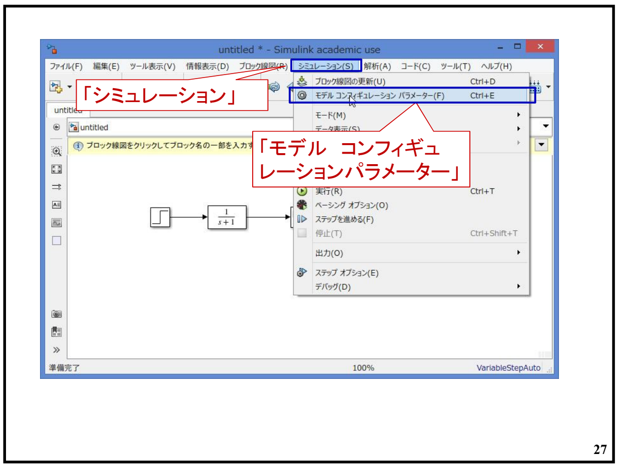

クリック
ブロック パラメーター: Transfer Fcn
Transfer Fcn
分子係数:
[1]
分母係数:
[1 1]
G(s) = 1 / (1s + 1)
22

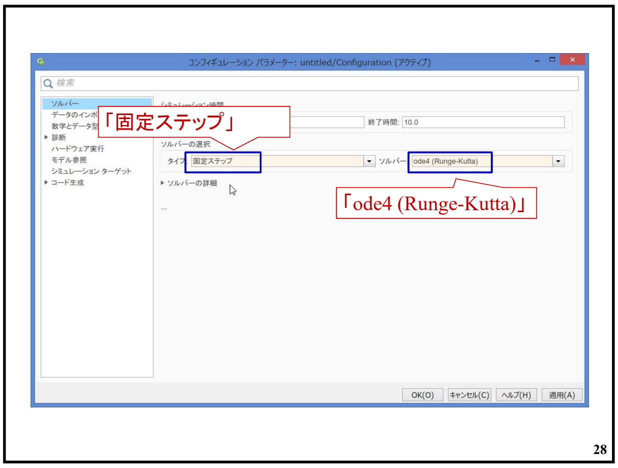

ドラッグ&ドロップ
「Sources」をクリック
「Step」
23

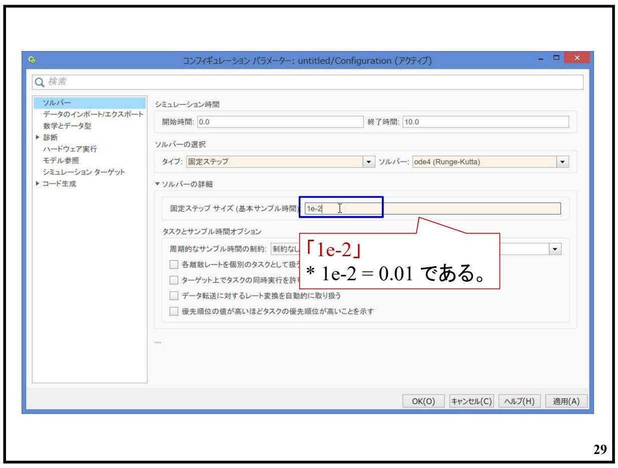

マウスをもってきて「+」に
変わったら，左クリックを
押す
24

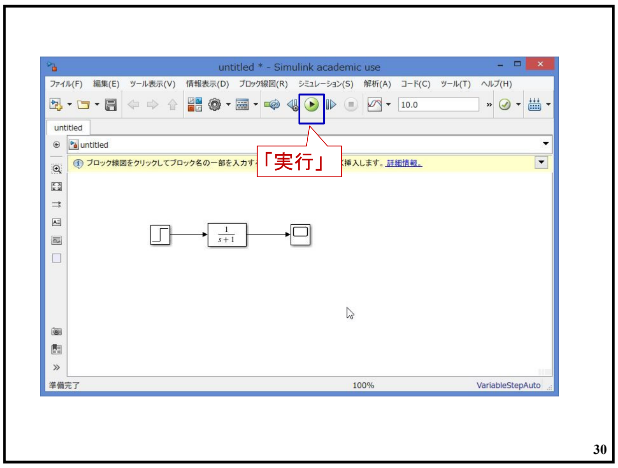

untitled * - Simulink academic use
接続するまで，マウスの
左クリックを押したままス
ライドする
25

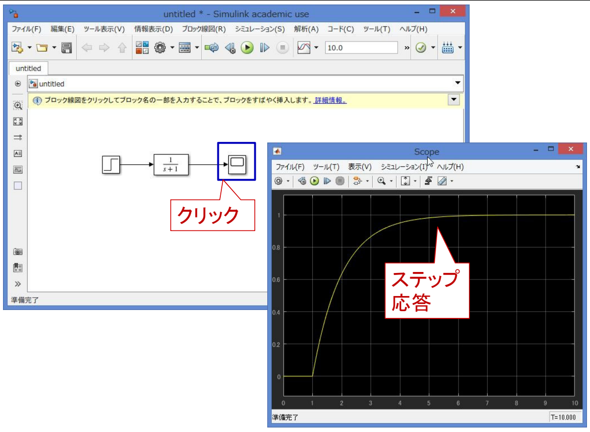

untitled * - Simulink academic use
ドラッグ&ドロップ
「Scope」
「Sinks」をクリック
26


untitled * - Simulink academic use
「シミュレーション」
「モデル コンフィギュ
レーションパラメーター」
27


「固定ステップ」
「ode4 (Runge-Kutta)」
28


「1e-2」
* 1e-2 = 0.01 である。
29

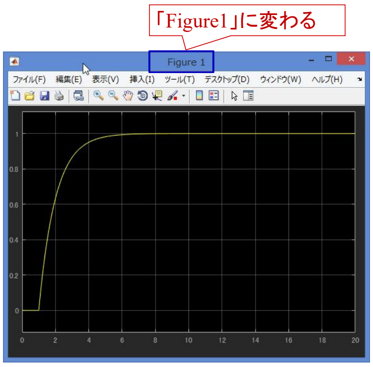

untitled * - Simulink academic use
「実行」
30



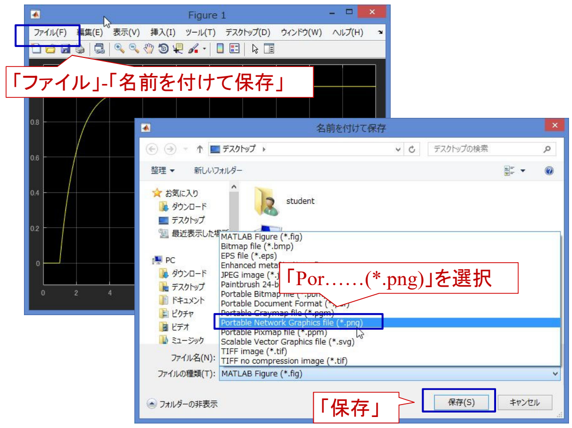
31

図の保存

32



33



34

【問題3】 次の伝達関数のステップ応答を求め下記の値を答えよ

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

(1) 遅れ時間
(2) 行き過ぎ時間
(3) オーバシュート
(4) 整定時間
(5) 減衰比

35

過渡応答に関する特性値

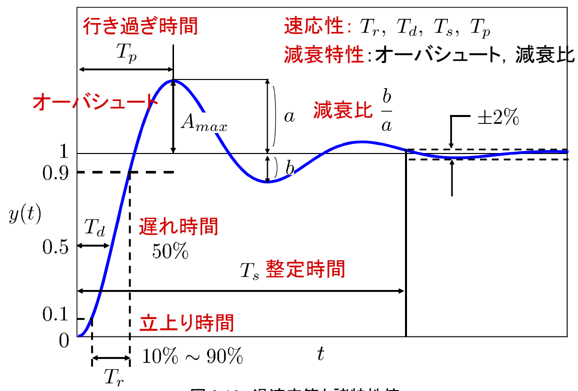


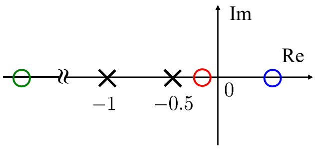
図 3.10 過渡応答と諸特性値

36

零点の影響

［例3.4］

$$G(s) = \frac{as+1}{(s+1)(2s+1)}$$



極: $\underline{-1,\ -0.5}$ 本来は，振動しない

零点: $-\frac{1}{a}$

$a<0$:（不安定）⇒ 逆ぶれ

a :小 ⇒ 影響なし

a :大 ⇒ オーバシュート

原点に近い極の応答が全体の応答になる。

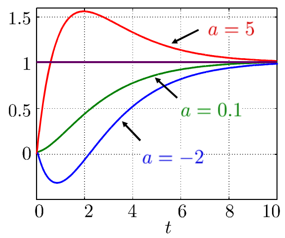
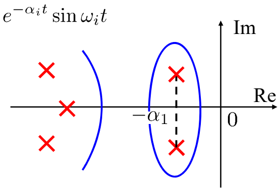


図 3.13 零点の影響

代表極

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin\omega_i t$$

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 \ll \alpha_j \ \ (j = 2 \sim N) \\ 0 < \alpha_1 \ll \sigma_j \ \ (j = 1 \sim M) \end{cases}$$



$e^{-\alpha_j t}$, $e^{-\sigma_j t}$ は急速に減少

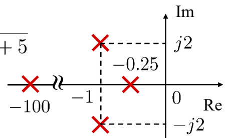
最も遅いモードは $\underline{e^{-\alpha_1 t}}$ が支配

代表極

$$y(t) \approx A_0 + \frac{B_1}{\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin\omega_1 t$$

［例 3.3］

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{\tau s+1} \cdot \frac{5}{s^2+2s+5}$$



$\tau s + 1 = 0$ ➡ $s = -\frac{1}{\tau}$

$s^2+2s+5=0$ ➡ $s = -1 \pm j2$

遅い方に引きずられている

- $\tau = 0.01$ $\quad -\frac{1}{\tau} = -100 \quad G \approx G_2$
- $\tau = 4$ $\quad -\frac{1}{\tau} = -0.25 \quad G \approx G_1$

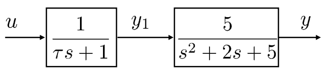


図 3.7 3次系のブロック線図

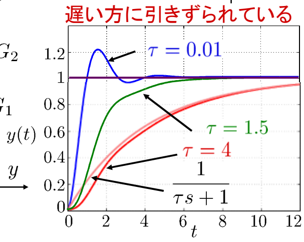


図 3.12 3次系の応答例

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

キーワード： 過渡応答，極，零点

学習目標： 極･零点と過渡応答の関係について理解する。