

第4章：フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

キーワード：開ループ伝達関数（一巡伝達関数），定常偏差，偏差定数， $I$ 型の制御系

学習目標：定常偏差や偏差定数について理解する。  
フィードバック制御系の型について理解する。

1

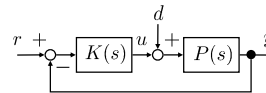
4 フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

目標値に対する定常偏差（外乱  $d=0$ ）

[例 4.2]

制御対象：  $P(s) = \frac{1}{s+1}$



コントローラ：  $K(s) = K$

図4.1 (b) フィードバック制御系

$r \rightarrow y$  への閉ループ系の伝達関数

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\frac{K}{s+1}}{1 + \frac{K}{s+1}} = \frac{K}{s+K+1}$$

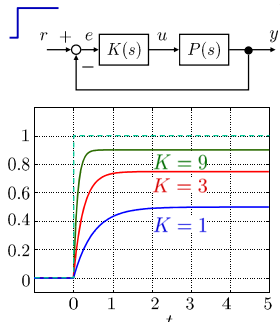
2

$y(s) = T(s)r(s)$      $\left[ T(s) = \frac{K}{s+K+1}, r(s) = \frac{1}{s} \text{ (ステップ応答)} \right]$

$y(s) = \frac{K}{1+K} \cdot \frac{K+1}{s+(K+1)} \cdot \frac{1}{s}$

$= \frac{K}{1+K} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+(K+1)} \right)$

$y(t) = \frac{K}{1+K} (1 - e^{-(K+1)t})$



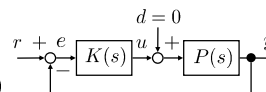
ゲイン:大  $\rightarrow$  (定常)偏差:減少

図4.3 ステップ応答例

3

偏差  $e(t) = r(t) - y(t)$

一巡伝達関数  $L(s) = P(s)K(s)$   
(開ループ伝達関数)



$e(s) = r(s) - L(s)e(s)$

$e(s) = r(s) - y(s)$

$\rightarrow (1 + L(s))e(s) = r(s)$

$y(s) = L(s)e(s)$

$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$   
(感度関数)

定常偏差

$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$   
 $= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s)$   
 $= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$

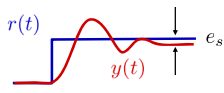
最終値定理 (p. 190 付録(L7))

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$   
 $F(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

4

[A] ステップ入力

$r(t) = 1$      $\left( r(s) = \frac{1}{s} \right)$

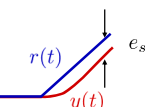


$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)}$  定常位置偏差

$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = L(0)$  位置偏差定数

[B] ランプ入力

$r(t) = t$      $\left( r(s) = \frac{1}{s^2} \right)$



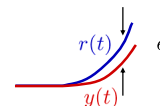
$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)}$

$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s)$  速度偏差定数    定常速度偏差

5

[C] 一定加速度入力

$r(t) = \frac{1}{2}t^2$      $\left( r(s) = \frac{1}{s^3} \right)$



$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)}$  定常加速度偏差

$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s)$  加速度偏差定数

偏差定数

$K_p (= L(0)), K_v, K_a$  :大  $\rightarrow$  定常偏差:小

6

(一般に)一巡伝達関数  $L(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^l (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)}$

**$l=0$ のとき:**  
 $L(s)$  は積分器  $\frac{1}{s}$  を持たない

$r(t) = 1 \Rightarrow e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$

$r(t) = t \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{0} = \infty$

$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{0} = \infty$

7

**$l=1$ のとき:**  
 $L(s)$  は積分器  $\frac{1}{s}$  を 1 個含む

$r(t) = 1 \Rightarrow e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$

$r(t) = t \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_v}$

$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{0} = \infty$

8

**$l=2$ のとき:**  
 $L(s)$  は積分器  $\frac{1}{s}$  を 2 個含む

$r(t) = 1 \Rightarrow e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$

$r(t) = t \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$

$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{K_a}$

9

定常偏差をゼロにするためには  
 **$l$  型(タイプ  $l$ )の制御系:**  $L(s)$  が  $l$  個の積分器  $\left(\frac{1}{s}\right)^l$  をもつ

$r(t) = 1$  のとき  $l \geq 1$

$r(t) = t$  のとき  $l \geq 2$

$r(t) = \frac{1}{2}t^2$  のとき  $l \geq 3$

$\Rightarrow$  (係数の値に関係なく) 常に, 定常偏差 = 0

表4.1 制御系の型と定常偏差

制御系の型	$r(t) = 1$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{t^2}{2}$
$l=0$ 0型	$\frac{1}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
$l=1$ 1型	0	$\frac{1}{K_v}$	$\infty$
$l=2$ 2型	0	0	$\frac{1}{K_a}$

10

**[例 4.3]**

$P(s) = \frac{1}{s}, K(s) = \frac{K_0}{s+1} (K_0 > 0)$

$L(s) = P(s)K(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$

**位置偏差定数**  
 $K_p = L(0) = \infty$

**定常位置偏差**  
 $e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + L(0)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$

( $K_0$ の値に関係なく)

図4.4 (a) ステップ応答

11

$L(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$

**速度偏差定数**  
 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_0}{s+1} = K_0$

**定常速度偏差**  
 $e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_0}$

**加速度偏差定数**  
 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{K_0}{s(s+1)} = 0$

**定常加速度偏差**  
 $e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \infty$

図4.4 (b) ランプ入力応答

12

**[例 4.3] (再考)**

$P(s) = \frac{1}{s}$ ,  $K(s) = \frac{K_0}{s+1}$  ( $K_0 > 0$ )

$r(s) = \frac{1}{s}$   
 $L(s) = P(s)K(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$     **1 型**

**$K_0$  の値に関係なく定常位置偏差 = 0**

$L(0) = \infty$  ( $\Leftrightarrow S(0) = \frac{1}{1+L(0)} = 0$ )

**目標値の周波数成分 ( $\omega = 0$ ) に対して、ループゲインが無限大**

13

**外乱に対する定常偏差 (目標値  $r = 0$ )**

$y(s) = P(s) \{d(s) + K(s)(r(s) - y(s))\}$   
 $(1 + P(s)K(s))y(s) = P(s)d(s)$   
 $y(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}d(s)$

**ステップ外乱**  $d(s) = \frac{1}{s}$   
**定常偏差**  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \frac{P(0)}{1 + P(0)K(0)}$   
 $K(0) = \infty$  または  $P(0) = 0$  ならば、定常偏差 = 0

**(実質的には)コントローラが積分器をもつことが重要**

**外乱の周波数成分 ( $\omega = 0$ ) に対して、コントローラのゲインが無限大**

14

**[例 4.4] 目標値応答と外乱発生**

$P(s) = \frac{1}{s}$ ,  $d(s) = \frac{1}{s}$

**ステップ外乱が同時に加わると定常偏差**

**制御器に積分器**

**図4.5 ステップ外乱が存在するときの目標値応答**

15

**MATLAB演習**

**(1) MATLABの起動**

をクリック

16

**(2) カレントフォルダの設定**

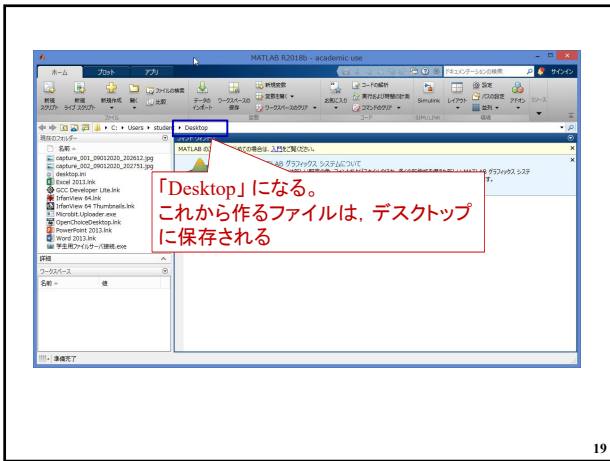
をクリック

17

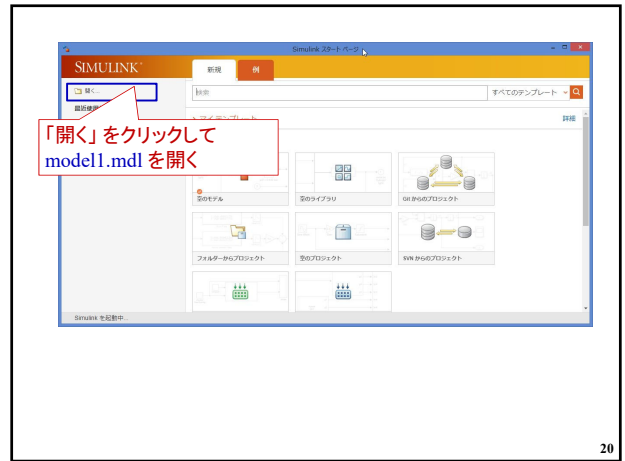
1. 「デスクトップ」を選択

2. 「フォルダを選択」をクリック

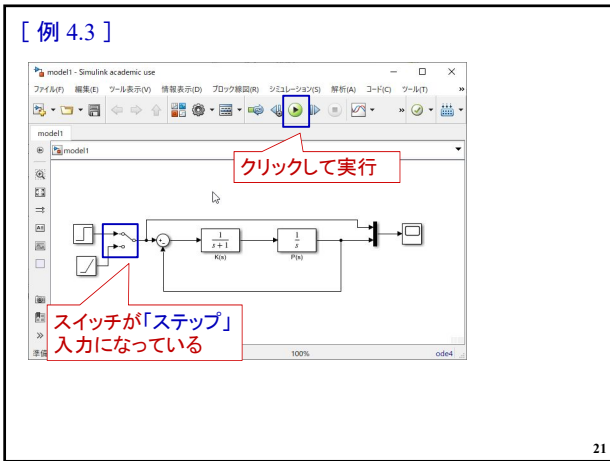
18



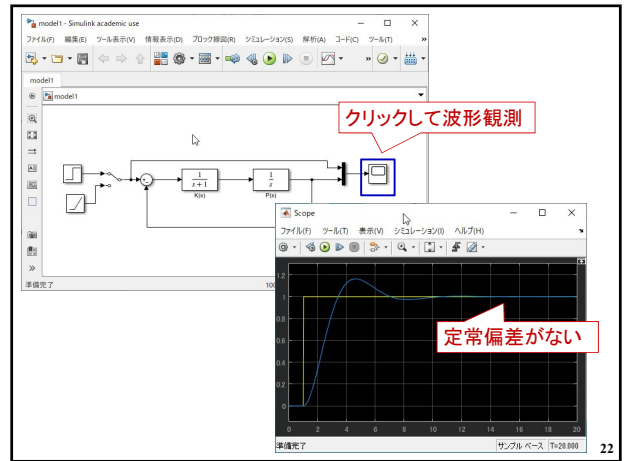
19



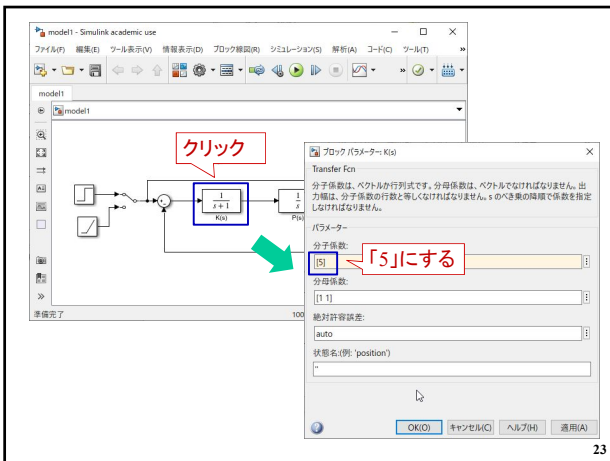
20



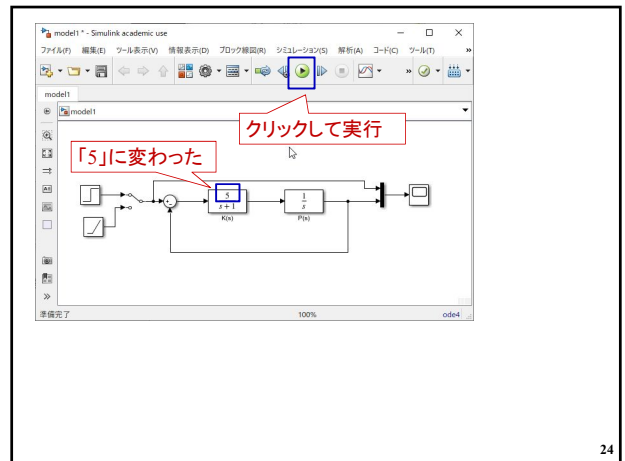
21



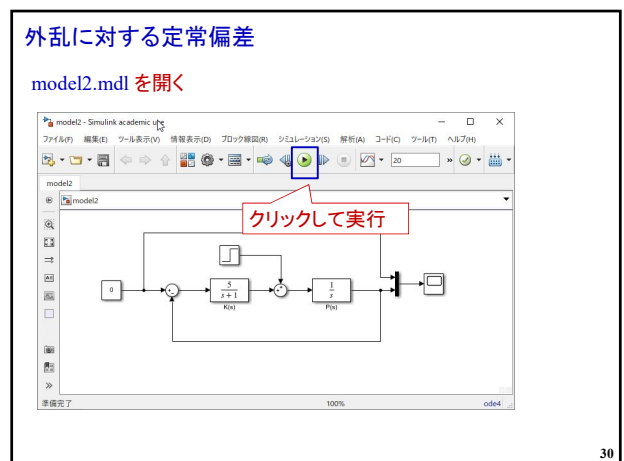
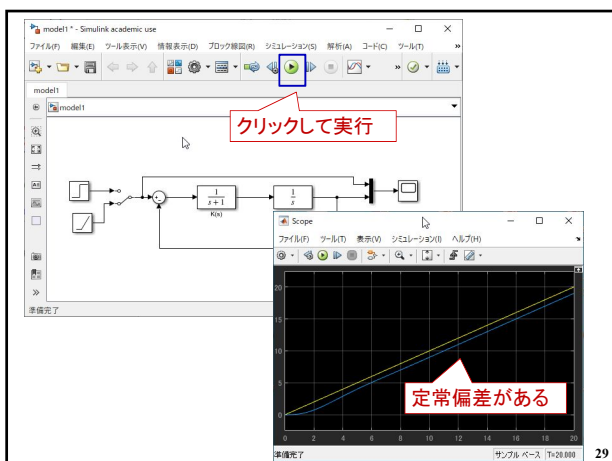
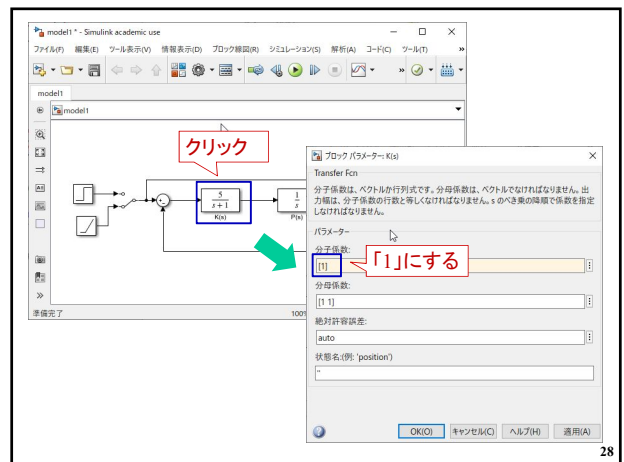
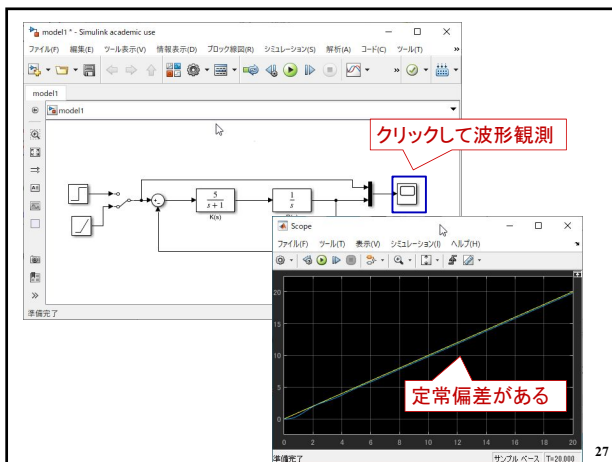
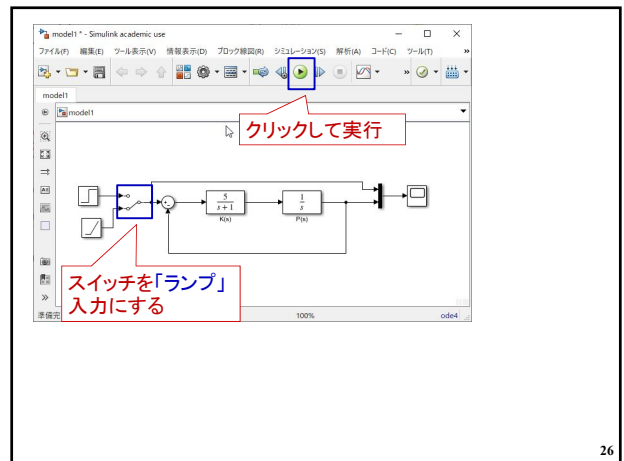
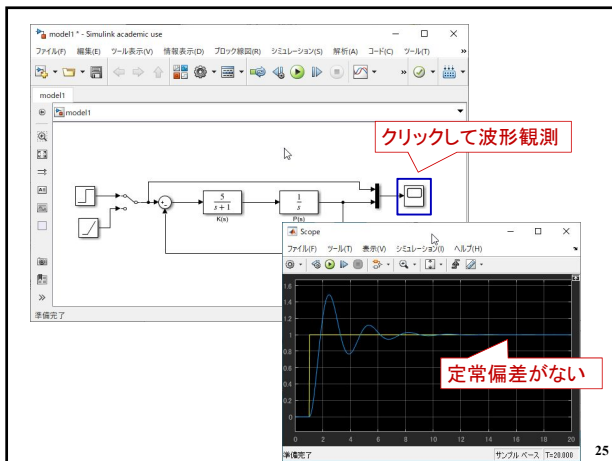
22

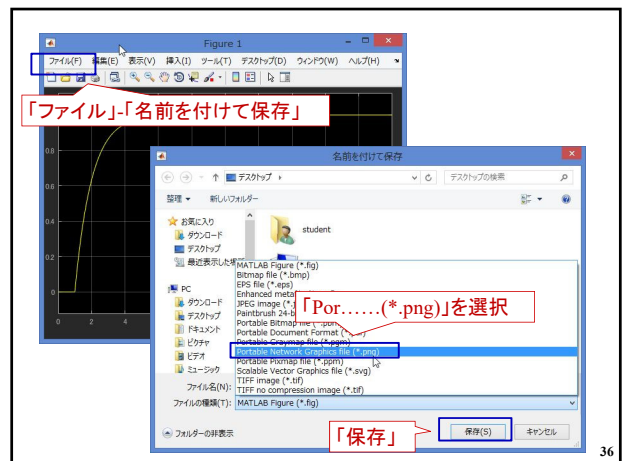
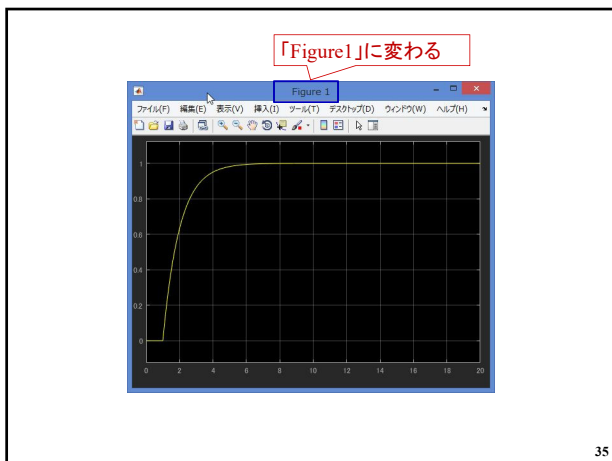
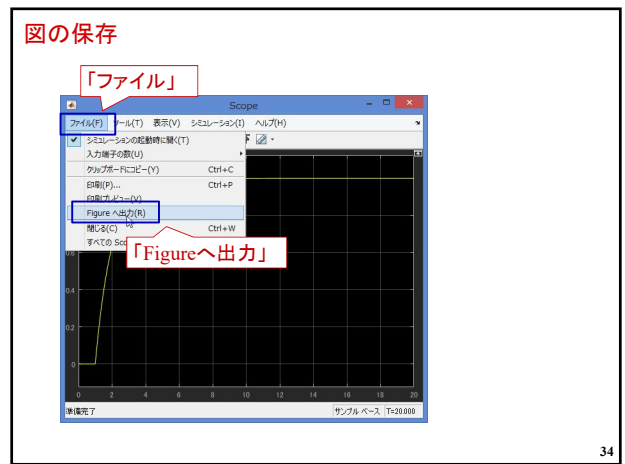
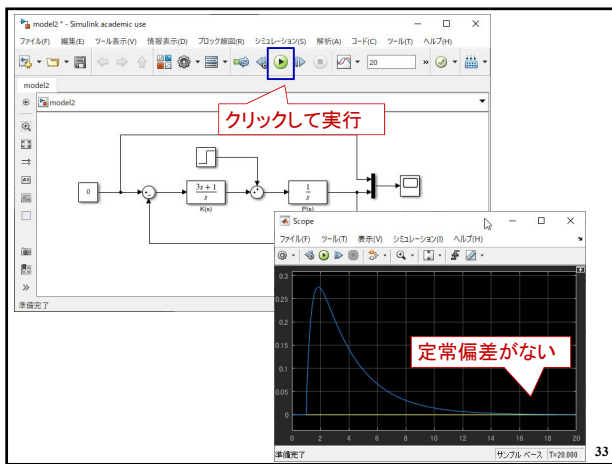
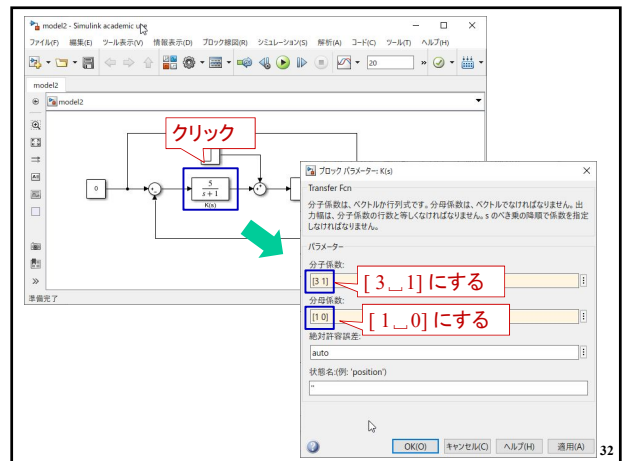
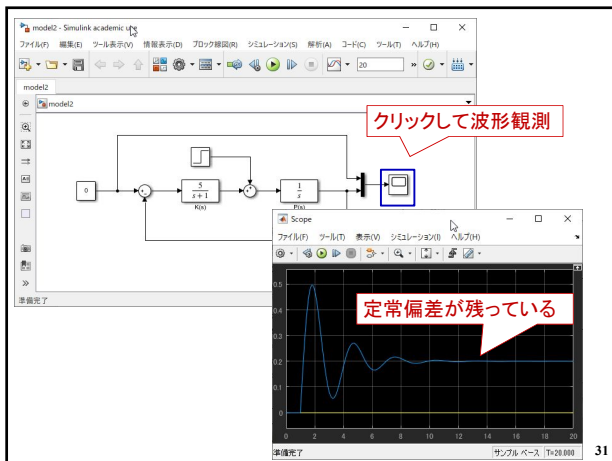


23



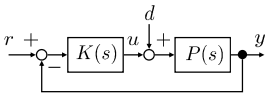
24





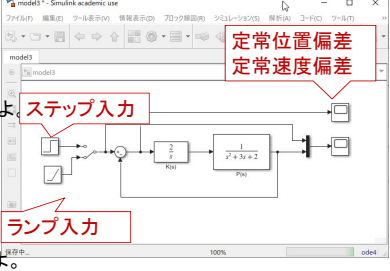
**【問題1】**

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

$$K(s) = \frac{2}{s}$$


(1)  $d(t) = 0$   
 $r(t)$ : ステップ入力  
 定常位置偏差を求めよ。

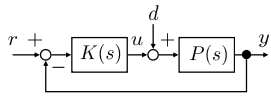
(2)  $d(t) = 0$   
 $r(t)$ : ランプ入力  
 定常速度偏差を求めよ。



37

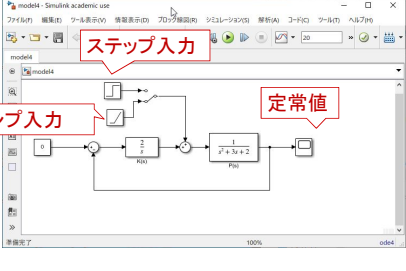
**【問題2】**

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

$$K(s) = \frac{2}{s}$$


(1)  $r(t) = 0$   
 $d(t)$ : ステップ入力  
 定常値を求めよ。

(2)  $r(t) = 0$   
 $d(t)$ : ランプ入力  
 定常値を求めよ。



38

**第4章：フィードバック制御系の特性**

4.2 定常特性

キーワード： 開ループ伝達関数(一巡伝達関数), 定常偏差, 偏差定数,  $l$ 型の制御系

学習目標： 定常偏差や偏差定数について理解する。  
 フィードバック制御系の型について理解する。

39