2019 年度 制御工学 I 第 11 回レポート (模範解答)

4 年 E 科 番号 ________ 氏名 ____________________

[問題 1] 4 章演習問題【2】

図 1 のフィードバック系において

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}, \quad K(s) = \frac{2}{s}$$

とする。このとき，まず $d(t) = 0$ として，目標値 $r(t)$ に対する定常位置偏差と定常速度偏差を計算せよ。つぎに $r(t) = 0$ として，ステップ外乱 $d(t) = 1$ およびランプ外乱 $d(t) = t$ を加えたときの $y(t)$ の定常値を計算せよ。

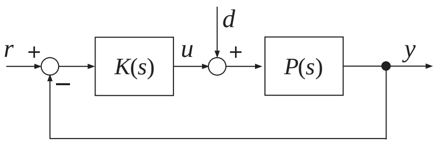

図 1: フィードバック系

【解答】

$d(t) = 0$ として目標値 $r(t)$ に対する定常位置偏差を求める。偏差 $e(s)$ を

$$e(s) = r(s) - y(s) \tag{1-1}$$

とし，偏差 $e(s)$ と $y(s)$ の関係

$$y(s) = P(s)K(s)e(s) \tag{1-2}$$

から，目標値 $r(s)$ から偏差 $e(s)$ までの伝達関数 $G_{er}(s)$ は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - P(s)K(s)e(s) \\ (1+P(s)K(s))e(s) &= r(s) \\ \frac{e(s)}{r(s)} &= \frac{1}{1+P(s)K(s)} \end{aligned} \tag{1-3}$$

よって，伝達関数 $G_{er}(s)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} G_{er}(s) &= \frac{1}{1+P(s)K(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{(s+2)(s+1)}\frac{2}{s}} \\ &= \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+2} \end{aligned} \tag{1-4}$$

定常位置偏差 e_{s1} は，最終値の定理を用いることにより次式となる。

$$\begin{aligned} e_{s1} &= \lim_{t\to\infty} G_{er}(s)r(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot G_{er}(s)r(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+2}\cdot\frac{1}{s} \\ &= \underline{0} \end{aligned} \tag{1-5}$$

また，定常速度偏差 e_{s2} も最終値の定理を用いることにより次式となる。

$$\begin{aligned} e_{s2} = &= \lim_{t\to\infty} G_{er}(s)r(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot G_{er}(s)r(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+2}\cdot\frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{s^2+3s+2}{s^3+3s^2+2s+2} \\ &= \underline{1} \end{aligned} \tag{1-6}$$

次に，$r(t) = 0$ として，ステップ外乱 $d(t) = 1$ およびランプ外乱 $d(t) = t$ を加えたときの $y(t)$ の定常値を求める。ステップ外乱 $d(t) = 1$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数 G_{yd} は

$$\begin{cases} u(s) = -K(s)y(s) \\ y(s) = P(s)(d(s)+u(s)) \end{cases} \tag{1-7}$$

の関係から以下のように求まる。

$$\begin{aligned} y(s) &= P(s)d(s) - P(s)K(s)y(s) \\ (1+P(s)K(s))y(s) &= P(s)d(s) \\ y(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}\cdot d(s) \end{aligned} \tag{1-8}$$

よって，外乱 $d(t)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数 $G_{yd}(s)$ は，次のように求められる。

$$\begin{aligned} G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)} \\ &= \frac{s}{s^3+3s^2+2s+2} \end{aligned} \tag{1-9}$$

よって，ステップ外乱 $d(t) = 1$ に対する定常値は，次式となる。

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} G_{yd}(s)d(s) &= \lim_{s\to 0} s\cdot G_{yd}(s)d(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s}{s^3+3s^2+2s+2}\cdot\frac{1}{s} \\ &= \underline{0} \end{aligned} \tag{1-10}$$

となる。また，ランプ外乱 $d(t) = t$ に対する定常値は，

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} G_{yd}(s)d(s) &= \lim_{s\to 0} s\cdot G_{yd}(s)d(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s}{s^3+3s^2+2s+2}\cdot\frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^3+3s^2+2s+2} \\ &= \underline{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1-11}$$

となる。

[問題 2]　4 章演習問題【3】

図 2 のフィードバック系において

$$P(s) = \frac{2}{(s+2)^2},\quad K(s) = 2$$

とする。このとき，つぎの問いに答えよ。

(1) この系では $y(s) = G_{yr}(s)r(s) + G_{yd}(s)d(s)$ という関係が成り立つ。伝達関数 $G_{yr}(s)$ と $G_{yd}(s)$ を求めよ。

(2) ステップ状の目標値と外乱 $r(t) = 2$，$d(t) = 4$ が同時に加わったとき，$y(t)$ の定常値を計算せよ。

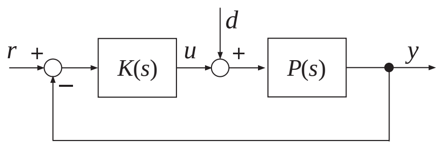

図 2: フィードバック系

【解答】

(1) 図 1 から次の式が成立する。

$$\begin{aligned}
& y(s) = ((r(s) - y(s))K(s) + d(s))P(s) \\
\Rightarrow\ & (1 + P(s)K(s))y(s) = P(s)K(s)r(s) + P(s)d(s) \\
\Rightarrow\ & y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}r(s) + \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}d(s)
\end{aligned} \tag{2-1}$$

(2-1) 式に $P(s) = \dfrac{2}{(s+2)^2}$，$K(s) = 2$ を代入することにより，

$$\begin{aligned}
\frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} &= \frac{\frac{2}{(s+2)^2}2}{1+\frac{2}{(s+2)^2}2} = \frac{4}{(s+2)^2+4} \\
&= \frac{4}{s^2+4s+8} \qquad (2\text{-}2) \\
\frac{P(s)}{1+P(s)K(s)} &= \frac{\frac{2}{(s+2)^2}}{1+\frac{2}{(s+2)^2}2} = \frac{2}{(s+2)^2+4} \\
&= \frac{2}{s^2+4s+8} \qquad (2\text{-}3)
\end{aligned}$$

(2-1) 式は，

$$y(s) = \frac{4}{s^2+4s+8}r(s) + \frac{2}{s^2+4s+8}d(s) \tag{2-4}$$

となる。よって，$y(s) = G_{yr}(s)r(s) + G_{yd}(s)d(s)$ と比較して，$G_{yr}(s)$，$G_{yd}(s)$ は

$$\underline{G_{yr}(s) = \frac{4}{s^2+4s+8}, G_{yd}(s) = \frac{2}{s^2+4s+8}} \tag{2-5}$$

となる。

(2) $y(t)$ の定常値 y_s は次のように計算することができる。

$$y_s = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sy(s) \tag{2-6}$$

目標値 $r(t) = 2$，外乱 $d(t) = 4$ をラプラス変換をすると

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{2}{s},\qquad \mathcal{L}[d(t)] = \frac{4}{s} \tag{2-7}$$

となる。よって，目標値 $r(s) = \frac{2}{s}$，外乱 $d(s) = \frac{4}{s}$ が同時に加わったとき定常値は，

$$\begin{aligned}
y_s &= \lim_{s\to 0} sy(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s(G_{yr}(s)r(s) + G_{yd}(s)d(s)) \\
&= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{4}{s^2+4s+8}\cdot\frac{2}{s} + \frac{2}{s^2+4s+8}\cdot\frac{4}{s}\right) \\
&= \frac{4}{8}\cdot 2 + \frac{2}{8}\cdot 4 \\
&= \underline{\ 2\ }
\end{aligned} \tag{2-8}$$

となる。