2021 年度 制御工学 I 第 2 回レポート (模範解答)

4 年 E 科 番号 ＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

[**問題 1**]　教科書【例 2.12】(p. 24-25) の磁気浮上系について，運動方程式 (2.36) と電気回路方程式 (2.37) を線形化して，式 (2.40) を導出するため，下記の空欄を埋めよ。

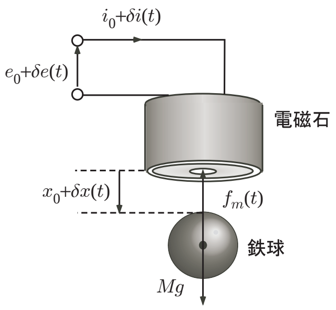

図 1: 磁気浮上系

図 1 のように質量 M [kg] の物体を空中に非接触で浮上させる磁気浮上系を考える。電磁石に流す電流を $i(t)$ [A]，電磁石と物体の間のギャップを $x(t)$ [m] とすると，電磁石による吸引力は $f_m(t) = k(i(t)/x(t))^2$ [N] と表される。ここで，k は電磁石吸引力係数である。したがって，運動方程式は

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\frac{i(t)}{x(t)}\right)^2 \tag{1}$$

となる。ただし，g [m/s^2] は重力加速度を表す。

一方，電磁石に加える入力電圧を $e(t)$ [V]，電磁石部のインダクタンスと抵抗をそれぞれ L [H], R [Ω] とすると，電気回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t) \tag{2}$$

と書ける。平衡点 (物体にかかる重力と電磁石の吸引力がつり合う状態) のまわりでの微小変化分に着目し

$$\begin{aligned} &x(t) = x_0 + \delta x(t), \quad i(t) = i_0 + \delta i(t) \\ &e(t) = e_0 + \delta e(t) \end{aligned} \tag{3}$$

とおく。平衡状態では電磁石による吸引力と物体にかかる重力が等しいので

$$Mg = k\left(\frac{i_0}{x_0}\right)^2 \tag{4}$$

また，電圧と電流の値に変化がないことから

$$Ri_0 = e_0 \tag{5}$$

の関係が成立する。$\frac{d^2x_0}{dt^2} = 0$，$\frac{di_0}{dt} = 0$ から式 (3) を式 (1) に代入すると

$$M\frac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\frac{i_o + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)}\right)^2 \tag{6}$$

式 (2) に代入すると

$$L\frac{d\delta i(t)}{dt} + R(i_0 + \delta i(t)) = e_0 + \delta e(t) \tag{7}$$

式 (7) は，式 (5) より

$$\underline{\underline{L\frac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)}} \tag{8}$$

となる。次に，式 (6) の線形化を考える。第 2 項を次のようにおく。

$$f(\delta x(t), \delta i(t)) = k\left(\frac{i_0 + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)}\right)^2 \tag{9}$$

これを線形化するが，2 変数の関数のテイラー展開の公式を用いて

$$\begin{aligned} f(\delta x(t), \delta i(t)) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial \delta x(t)}(0,0)\delta x(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial \delta i(t)}(0,0)\delta i(t) \end{aligned} \tag{10}$$

となる。

$$f(0,0) = k\left(\frac{i_0 + 0}{x_0 + 0}\right)^2 = k\left(\frac{i_0}{x_0}\right)^2 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \delta x(t)}(\delta x(t), \delta i(t)) &= 2k\frac{i_0 + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)}\frac{\partial}{\partial \delta x(t)}\left(\frac{i_0 + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)}\right) \\ &= 2k\frac{i_0 + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)} \times \frac{-(i_0 + \delta i(t))}{(x_0 + \delta x(t))^2} \\ &= -2k\frac{(i_0 + \delta i(t))^2}{(x_0 + \delta x(t))^3} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \delta x(t)}(0,0) = -2k\frac{i_0^2}{x_0^3} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \delta i(t)}(\delta x(t), \delta i(t)) &= 2k\frac{i_0 + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)}\frac{\partial}{\partial \delta i(t)}\left(\frac{i_0 + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)}\right) \\ &= 2k\frac{i_0 + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)} \times \frac{1}{x_0 + \delta x(t)} \\ &= 2k\frac{i_0 + \delta i(t)}{(x_0 + \delta x(t))^2} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \delta i(t)}(0,0) = 2k\frac{i_0}{x_0^2} \tag{15}$$

となる。

$$k\left(\frac{i_0 + \delta i(t)}{x_0 + \delta x(t)}\right)^2 = k\left(\frac{i_0}{x_0}\right)^2 - 2k\frac{i_0^2}{x_0^3}\delta x(t) + 2k\frac{i_0}{x_0^2}\delta i(t) \tag{16}$$

とできる。式 (6) に代入すると

$$M\frac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\frac{i_0}{x_0}\right)^2 + 2k\frac{i_0^2}{x_0^3}\delta x(t) - 2k\frac{i_0}{x_0^2}\delta i(t) \tag{17}$$

$K_x = 2ki_0^2/x_0^3,\ K_i = 2ki_0/x_0^2$ とおき，式 (4) より式 (6) は

$$\underline{\underline{M\frac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)}} \tag{18}$$

となる。