2021年度 制御工学 I 第3回資料

第 2 章 : ダイナミカルシステムの表現

2.2 伝達関数

キーワード : 伝達関数

学習目標 : 伝達関数表現の利点を理解して，様々なシステムに対する伝達関数の導出方法を習得する。

1

2 ダイナミカルシステムの表現
2.2 伝達関数

$$\text{伝達関数} = \frac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}} \quad (\text{すべての初期値} = 0)$$

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ の定義より $Y(s) = G(s)U(s)$

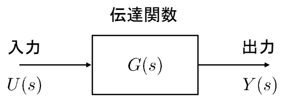

図 2.7 伝達関数

2

一般的には

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

「微分する」⟶「 s をかける」

$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$

ラプラス変換

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \cdots + a_1 sY(s) + a_0 Y(s)$$
$$= b_m s^m U(s) + b_{m-1}s^{m-1}U(s) + \cdots + b_1 sU(s) + b_0 U(s)$$

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s)$$
$$= \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

3

ダイナミクス 微分 積分 ⟹ s の 乗算 除算

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

加減乗除の代数的演算のみでよい

システムの結合（分離）の表現にメリット

4

[例 2.8] 水位系

$$A\frac{d}{dt}\delta h(t) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\delta h(t) = \delta q_i(t)$$

$\delta q_i(t)$: 入力
$\delta h(t)$: 出力

ラプラス変換

$Q_i(s) = \mathcal{L}[\delta q_i(t)]$
$H(s) = \mathcal{L}[\delta h(t)]$
（すべての初期値 $= 0$）

$$AsH(s) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}H(s) = Q_i(s)$$
$$\left(As + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\right)H(s) = Q_i(s)$$

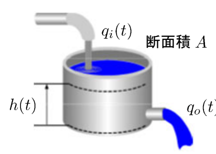

図 2.5 水位系

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{As + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}}$$

5

[例 2.11] RLC 回路

$$LC\frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + RC\frac{de_o}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$

$e_i(t)$: 入力
$e_o(t)$: 出力

ラプラス変換

$E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$
$E_o(s) = \mathcal{L}[e_o(t)]$
（すべての初期値 $= 0$）

$$LCs^2E_o(s) + RCsE_o(s) + E_o(s) = E_i(s)$$
$$\left(LCs^2 + RCs + 1\right)E_o(s) = E_i(s)$$

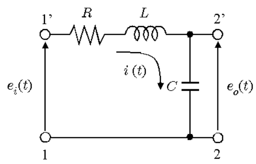

図 2.4 RLC回路

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

6

[例 2.12] 磁気浮上系

- $M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2$
- $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t)$

$x(t) = x_0 + \delta x(t),\ i(t) = i_0 + \delta i(t)$

$e(t) = e_0 + \delta e(t)$

第2回レポートを参照

線形化 $k\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2 = k\left(\dfrac{i_0}{x_0}\right)^2 + \cdots$

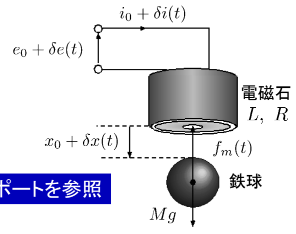

図 2.9 磁気浮上系

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$
- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

$\delta e(t)$: 入力

$\delta x(t)$: 出力

$K_x = \dfrac{2ki_0^2}{x_0^3},\ K_i = \dfrac{2ki_0}{x_0^2}$

7

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$

ラプラス変換 $X_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta x(t)]$ $I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$

(すべての初期値＝0)

$Ms^2X_\delta(s) = K_xX_\delta(s) - K_iI_\delta(s)$

$\Rightarrow\ X_\delta(s) = \dfrac{-K_i}{Ms^2-K_x}I_\delta(s)$

- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

ラプラス変換 $I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$ $E_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta e(t)]$

(すべての初期値＝0)

$LsI_\delta(s) + RI_\delta(s) = E_\delta(s)$

$\Rightarrow\ I_\delta(s) = \dfrac{1}{Ls+R}E_\delta(s)$

伝達関数

$$G(s) = \frac{X_\delta(s)}{E_\delta(s)} = \frac{X_\delta(s)}{I_\delta(s)}\cdot\frac{I_\delta(s)}{E_\delta(s)} = \frac{-K_i}{Ms^2-K_x}\cdot\frac{1}{Ls+R} = \frac{-K_i}{(Ms^2-K_x)(Ls+R)}$$

8

[例 2.7] ばね系

$x(t) = \dfrac{1}{K}f(t)$

$f(t)$: 入力

$x(t)$: 出力

ラプラス変換 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$

$X(s) = \dfrac{1}{K}F(s)$

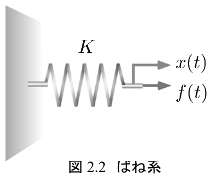

図 2.2 ばね系

伝達関数 $G(s)$

$G(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{K}$

伝達関数 $=$ $\dfrac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$

9

[例 2.9] RC 回路

- $i(t) = C\dfrac{de_o(t)}{dt}$
- $e_i(t) = Ri(t) + e_o(t)$

$e_i(t)$: 入力

$e_o(t)$: 出力

$RC\dfrac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$

ラプラス変換 $E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$ $E_o(s) = \mathcal{L}[e_o(t)]$

(すべての初期値＝0)

$RCsE_o(s) + E_o(s) = E_i(s)$

$(RCs+1)\,E_o(s) = E_i(s)$

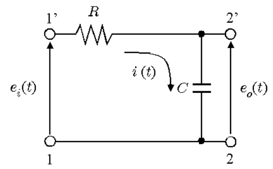

図 2.8 RC回路

伝達関数 $G(s)$

$G(s) = \dfrac{E_o(s)}{E_i(s)} = \dfrac{1}{RCs+1}$

10

[例 2.10] 質量ーばねーダンパ系

$M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + D\dfrac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$

$f(t)$: 入力

$x(t)$: 出力

ラプラス変換 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

(すべての初期値＝0)

$Ms^2X(s) + DsX(s) + KX(s) = F(s)$

$(Ms^2+Ds+K)\,X(s) = F(s)$

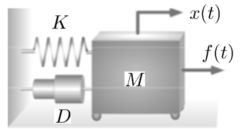

図 2.3 質量ーばねーダンパ系

伝達関数 $G(s)$

$G(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{Ms^2+Ds+K}$

11

[例 2.13] むだ時間(時間遅れ)要素

$y(t) = u(t-L)$ $L = l/v$

ラプラス変換 $e^{-as}F(s) = \mathcal{L}[f(t-a)]$

$Y(s) = e^{-sL}U(s)$

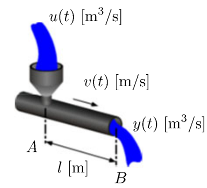

図 2.10 むだ時間要素の例

伝達関数 $G(s)$

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = e^{-sL}$

パデー近似

$e^{-sL} \approx \dfrac{1-Ls/2}{1+Ls/2}$

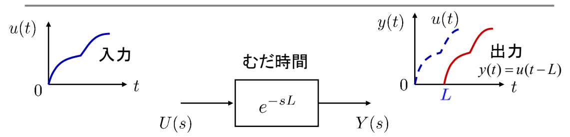

図 2.11 むだ時間要素

12

第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.2 伝達関数

キーワード： 伝達関数

学習目標：伝達関数表現の利点を理解して，様々なシステムに対する伝達関数の導出方法を習得する。

システム的アプローチ

物知的実体の違いを越えてこれらを数理的に記述されるダイナミカルシステムとして普遍的に捉えその中に共通する概念や方法論を構築していく.

表 2.4 物理システムのアナロジー

機械系（直線運動）	機械系（回転運動）	電気系	水位系	熱系
力 f [N]	トルク τ [N·m]	電圧 e [V]	水位 h [m]	温度 θ [K]
速度 v [m/s]	角速度 ω [rad/s]	電流 i [A]	流量 q [m^3/s]	熱流量 q [J/s]
変位 x [m]	角変位 θ [rad]	電荷 q [C]	流体量 V [m^3]	熱量 Q [J]
質量 M [kg]	慣性モーメント J [kg·m^2]	インダクタンス L [H]		
粘性摩擦係数 D [N·s/m]	粘性摩擦係数 B [N·m·s/rad]	抵抗 R [Ω]	出口抵抗 R [s/m^2]	熱抵抗 R [K·s/J]
ばね定数 K [N/m]	ばね定数 K [N·m/rad]	容量 C [F]	液面面積 A [m^2]	熱容量 C [J/K]