2021年度 制御工学 I 第4回資料

第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.3 ブロック線図

キーワード： ブロック線図，等価変換

学習目標：伝達関数で表された要素の結合と信号の流れのようすを，ブロック線図により表す方法を習得する。

1

2 ダイナミカルシステムの表現
2.3 ブロック線図

ブロック線図

システムの結合 / 信号の流れの様子を表現

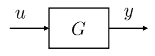
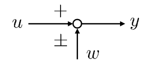
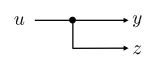
ブロック線図の基本単位

ブロック

加え合せ点

引き出し点

表 2.1 ブロック線図の基本単位

基本単位	記号	式
ブロック		$y=Gu$
加え合せ点		$y=u\pm w$
引き出し点		$y=u,\ z=u$

2

[例 2.14] DC サーボモータ

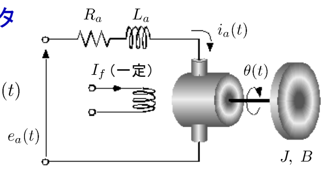


図 2.12 DCサーボモータ

電機子回路

- $e_a(t)=L_a\dfrac{di_a(t)}{dt}+R_ai_a+e_b(t)$

逆起電力

- $e_b(t)=K_b\omega(t)$
- $\omega(t)=\dfrac{d\theta(t)}{dt}$

発生トルク

- $\tau(t)=K_\tau i_a(t)$

回転運動

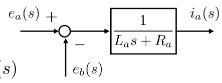
- $\tau(t)=J\dfrac{d\omega(t)}{dt}+B\omega(t)$

@Futaba

3

(a) 電機子回路

- $e_a(t)=L_a\dfrac{di_a(t)}{dt}+R_ai_a(t)+e_b(t)$



ラプラス変換

$$e_a(s)=L_ai_a(s)s+R_ai_a(s)+e_b(s)$$

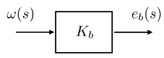
$$(L_as+R_a)i_a(s)=e_a(s)-e_b(s)$$

$$i_a(s)=\frac{1}{L_as+R_a}(e_a(s)-e_b(s))$$

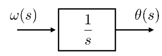
(b) 逆起電力

ラプラス変換

- $e_b(t)=K_b\omega(t)$ → $e_b(s)=K_b\omega(s)$



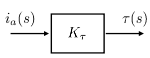
- $\omega(t)=\dfrac{d\theta(t)}{dt}$ → $\theta(s)=\dfrac{1}{s}\omega(s)$



4

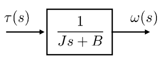
(c) 発生トルク

- $\tau(t)=K_\tau i_a(t)$ → $\tau(s)=K_\tau i_a(s)$



(d) 回転運動

- $\tau(t)=J\dfrac{d\omega(t)}{dt}+B\omega(t)$



→ $\tau(s)=J\omega(s)s+B\omega(s)$

$\tau(s)=(Js+B)\omega(s)$

$\omega(s)=\dfrac{1}{Js+B}\tau(s)$

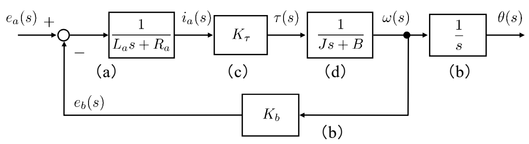


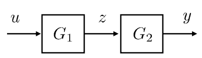
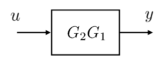
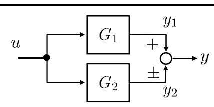
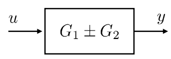
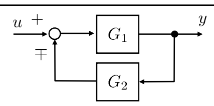
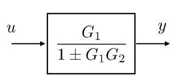
図 2.14 DC サーボモータの全体のブロック線図

5

ブロック線図の結合方式

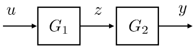
直列結合，並列結合，フィードバック結合

表 2.2 ブロック線図の結合方式

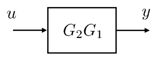
結合方式	結合前	結合後
直列結合		
並列結合		
フィードバック結合		

6

直列結合

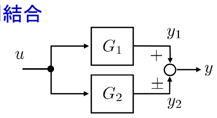


- $y = G_2 z$
- $z = G_1 u$

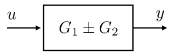


$y = G_2 G_1 u$

並列結合



- $y_1 = G_1 u$
- $y_2 = G_2 u$
- $y = y_1 \pm y_2$

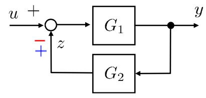


$$y = G_1 u \pm G_2 u$$
$$= (G_1 \pm G_2)\, u$$

7

フィードバック結合

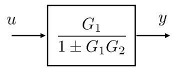
- ネガティブ・フィードバック
- ポジティブ・フィードバック



ネガティブ・フィードバック

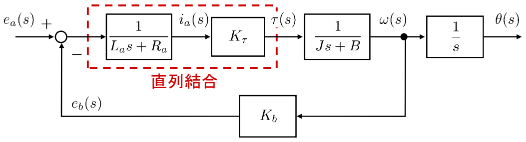
- $z = G_2 y$
- $y = G_1\,(u - z)$

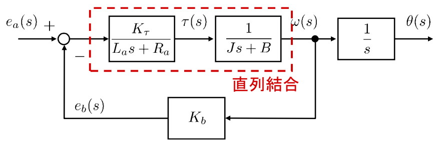
$$y = G_1\,(u - G_2 y)$$
$$(1 + G_1 G_2)\, y = G_1 u$$
$$y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} u$$



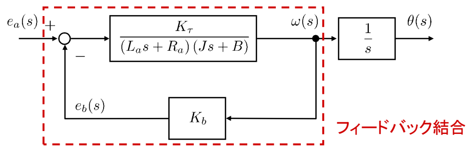
8

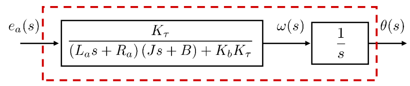
[例 2.15] DC サーボモータ





9





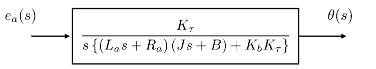
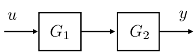
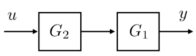
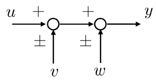
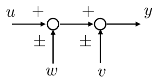
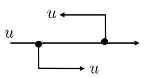
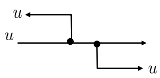


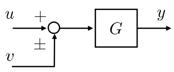
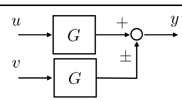
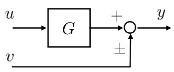
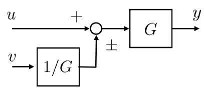
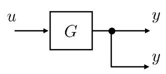
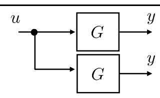
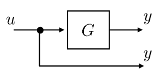
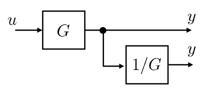
図 2.15 DC サーボモータのブロック線図の簡略化

10

表 2.3 ブロック線図の等価変換

等価変換	変換前	変換後
ブロックの入れ替え		
加え合せ点の入れ替え		
引き出し点の入れ替え		

11

等価変換	変換前	変換後
ブロックと加え合せ点の入れ替え(1)		
ブロックと加え合せ点の入れ替え(2)		
ブロックと引き出し点の入れ替え(1)		
ブロックと引き出し点の入れ替え(2)		

第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.3 ブロック線図

キーワード：ブロック線図，等価変換

学習目標：伝達関数で表された要素の結合と信号の流れのようすを，ブロック線図により表す方法を習得する。

13

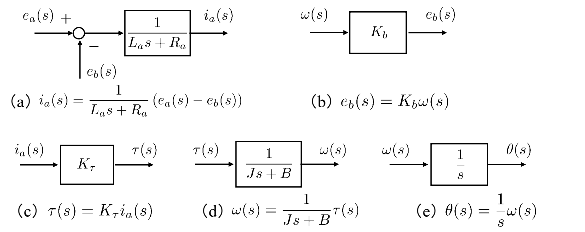


図 2.13 DC サーボモータの各部のブロック線図

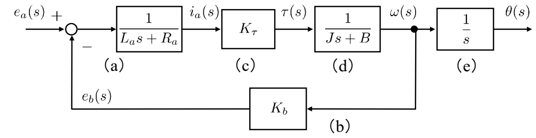
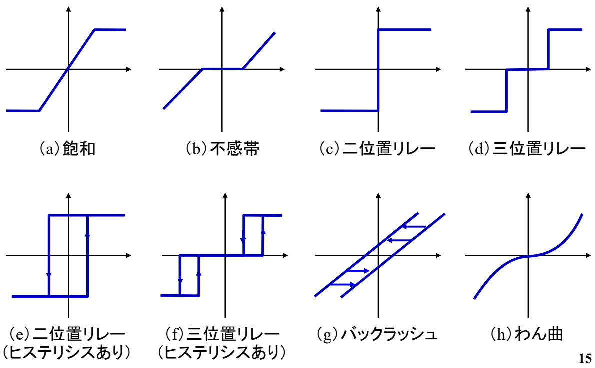


図 2.14 DC サーボモータの全体のブロック線図

14

非線形要素

代表的な非線形要素



15

[例 2.12] 磁気浮上系

- $M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2$
- $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t)$

$x(t) = x_0 + \delta x(t),\ i(t) = i_0 + \delta i(t)$

$e(t) = e_0 + \delta e(t)$

線形化 $\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2 = \left(\dfrac{i_0}{x_0}\right)^2 + \cdots$

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$
- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

$$K_x = \frac{2ki_0^2}{x_0^3},\ K_i = \frac{2ki_0}{x_0^2}$$

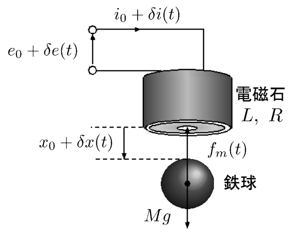


図 2.9 磁気浮上系

$\delta e(t)$：入力

$\delta x(t)$：出力

16

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$

ラプラス変換 $X_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta x(t)]$, $I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$ (すべての初期値 $=0$)

$Ms^2X_\delta(s) = K_xX_\delta(s) - K_iI_\delta(s)$

$\Rightarrow X_\delta(s) = \dfrac{-K_i}{Ms^2 - K_x}I_\delta(s)$

- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

ラプラス変換 $I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$, $E_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta e(t)]$ (すべての初期値 $=0$)

$LsI_\delta(s) + RI_\delta(s) = E_\delta(s)$

$\Rightarrow I_\delta(s) = \dfrac{1}{Ls+R}E_\delta(s)$

$$E_\delta(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{Ls+R}} \longrightarrow I_\delta(s) \qquad I_\delta(s) \longrightarrow \boxed{\frac{-K_i}{Ms^2 - K_x}} \longrightarrow X_\delta(s)$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{-K_i}{(Ms^2 - K_x)(Ls+R)}} \longrightarrow$$

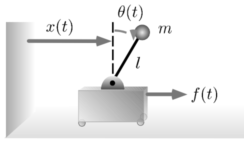
伝達関数

$$G(s) = \frac{-K_i}{(Ms^2 - K_x)(Ls+R)}$$

17

[2章 演習問題【4】] 倒立振子

- $M\ddot{x}(t) + m\dfrac{d^2}{dt^2}(x(t) + l\sin\theta(t)) = f(t)$
- $ml\ddot{\theta}(t) = mg\sin\theta(t) - m\ddot{x}(t)\cos\theta(t)$



式整理

- $(M+m)\ddot{x}(t) - ml\underline{\dot{\theta}^2(t)\sin\theta(t)} + ml\ddot{\theta}(t)\underline{\cos\theta(t)} = f(t)$
- $ml\ddot{\theta}(t) + m\ddot{x}(t)\underline{\cos\theta(t)} = mg\underline{\sin\theta(t)}$

非線形項

線形化 $\theta(t) \approx 0$ であるとき，

$\sin\theta(t) \approx \theta(t),\ \ \cos\theta(t) \approx 1,\ \dot{\theta}^2(t) \approx 0$

$$\sin\theta(t) = \theta(t) - \frac{\theta^3(t)}{3!} + \cdots$$

$$\cos\theta(t) = 1 - \frac{\theta^2(t)}{2!} + \cdots$$

- $(M+m)\ddot{x}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = f(t)$
- $ml\ddot{\theta}(t) + m\ddot{x}(t) = mg\theta(t)$

18

- $(M+m)\ddot{x}(t)+ml\ddot{\theta}(t)=f(t)$
- $ml\ddot{\theta}(t)+m\ddot{x}(t)=mg\theta(t)$

ラプラス変換 $x(s)=\mathcal{L}[x(t)],\ \theta(s)=\mathcal{L}[\theta(t)]$

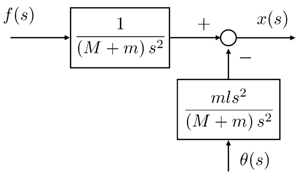
$f(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

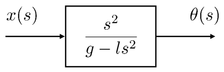
ラプラス変換

- $(M+m)\,s^2x(s)+mls^2\theta(s)=f(s)$
- $mls^2\theta(s)+ms^2x(s)=mg\theta(s)$

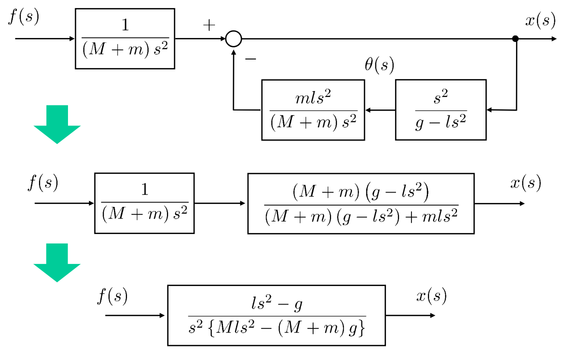
$$\Rightarrow x(s)=\frac{1}{(M+m)\,s^2}f(s)-\frac{mls^2}{(M+m)\,s^2}\theta(s)$$

$$\Rightarrow \theta(s)=\frac{s^2}{g-ls^2}x(s)$$





19



伝達関数

$$G(s)=\frac{x(s)}{f(s)}=\frac{ls^2-g}{s^2\left\{Mls^2-(M+m)\,g\right\}}$$

20