第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.3 ブロック線図

キーワード： ブロック線図，等価変換

学習目標：伝達関数で表された要素の結合と信号の流れのようすを，ブロック線図により表す方法を習得する。

2 ダイナミカルシステムの表現
2.3 ブロック線図

ブロック線図

システムの結合 / 信号の流れの様子を表現

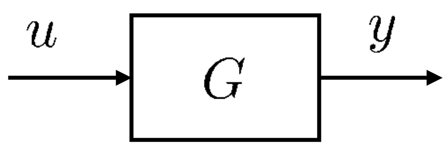
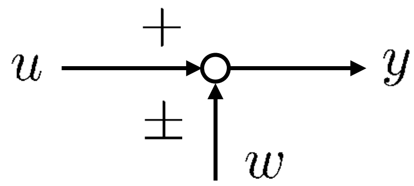
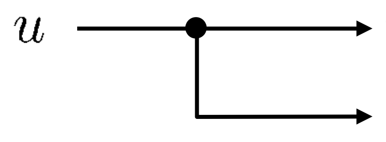
ブロック線図の基本単位

ブロック

加え合せ点

引き出し点

表 2.1 ブロック線図の基本単位

基本単位	記号	式
ブロック		$y = Gu$
加え合せ点		$y = u \pm w$
引き出し点		$y = u,\ z = u$

[例 2.14] DC サーボモータ

電機子回路

- $e_a(t) = L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a + e_b(t)$

逆起電力

- $e_b(t) = K_b \omega(t)$
- $\omega(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$

発生トルク

- $\tau(t) = K_\tau i_a(t)$

回転運動

- $\tau(t) = J \dfrac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$

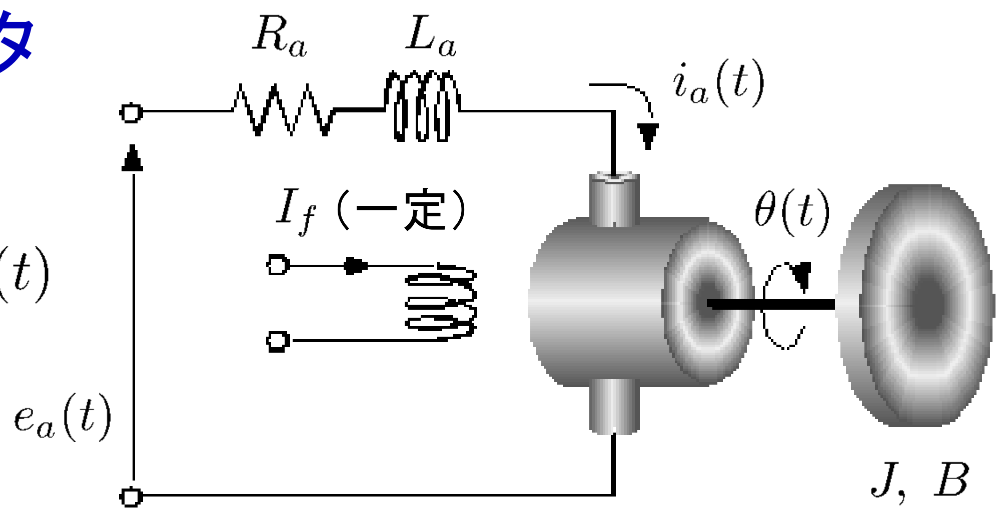
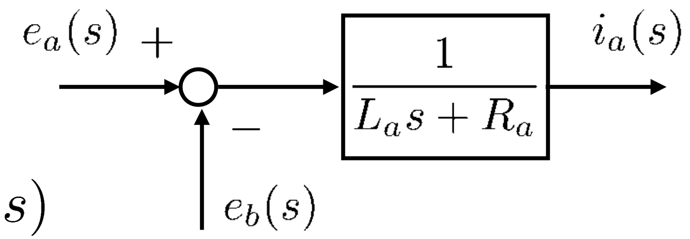


図 2.12　DCサーボモータ

@Futaba

(a) 電機子回路

- $e_a(t) = L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t)$



ラプラス変換

$$e_a(s) = L_a i_a(s) s + R_a i_a(s) + e_b(s)$$

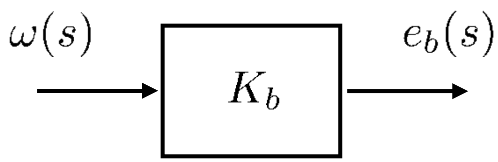
$$(L_a s + R_a) i_a(s) = e_a(s) - e_b(s)$$

$$i_a(s) = \frac{1}{L_a s + R_a}(e_a(s) - e_b(s))$$

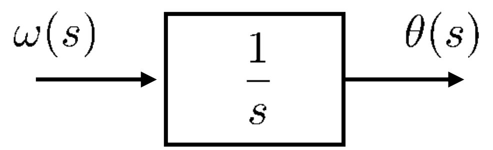
(b) 逆起電力

ラプラス変換

- $e_b(t) = K_b \omega(t)$ → $e_b(s) = K_b \omega(s)$

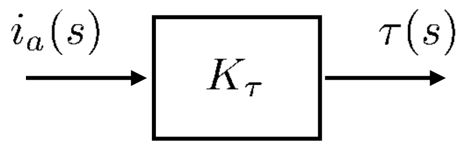


- $\omega(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$ → $\theta(s) = \dfrac{1}{s}\omega(s)$



(c) 発生トルク

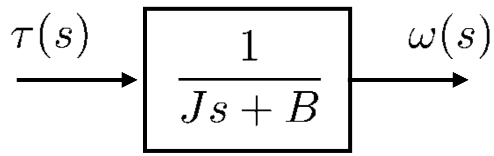
- $\tau(t) = K_\tau i_a(t)$ ➡ $\tau(s) = K_\tau i_a(s)$



(d) 回転運動

- $\tau(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$

➡
$$\tau(s) = J\omega(s)s + B\omega(s)$$
$$\tau(s) = (Js + B)\omega(s)$$
$$\omega(s) = \frac{1}{Js + B}\tau(s)$$



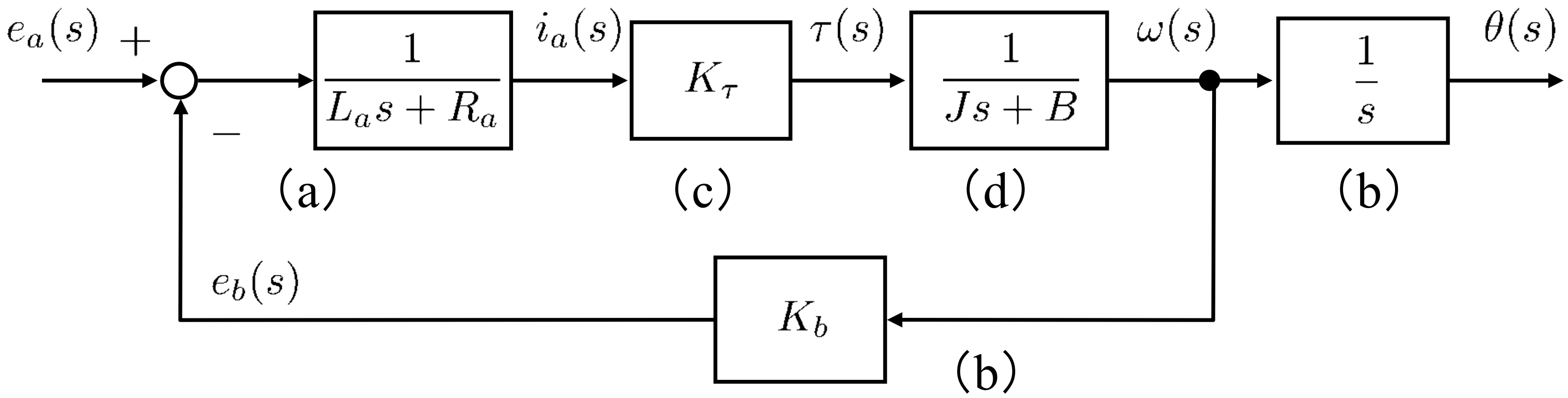
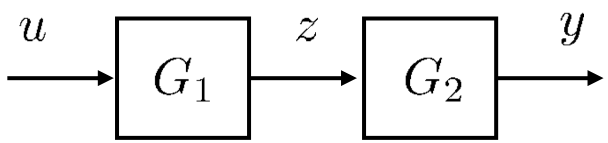
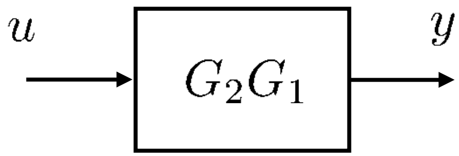
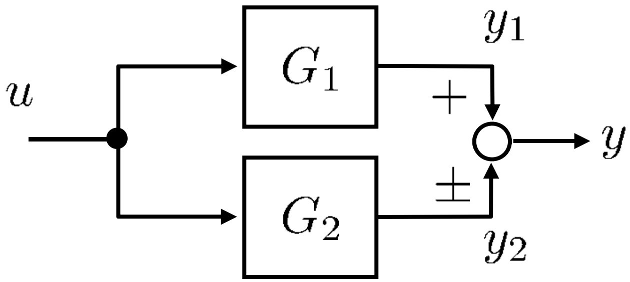
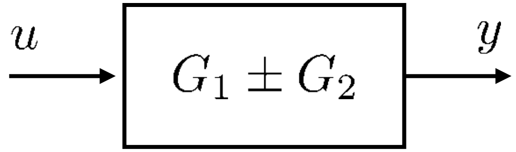
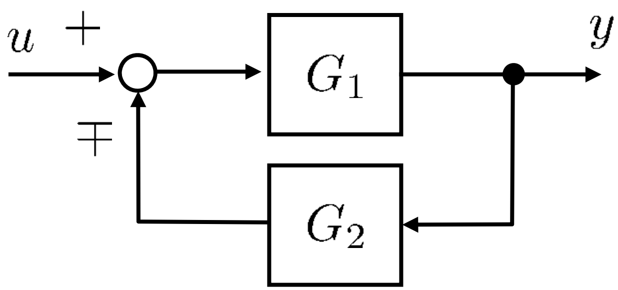
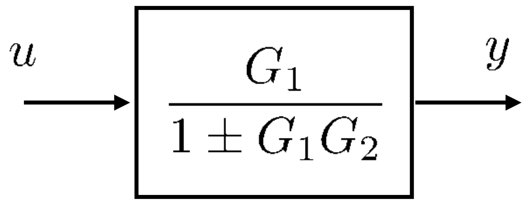


図 2.14 DC サーボモータの全体のブロック線図

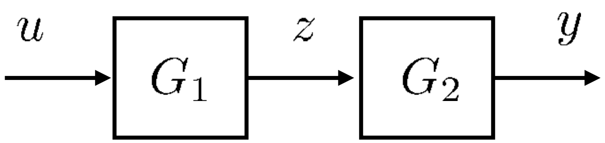
ブロック線図の結合方式

直列結合，並列結合，フィードバック結合

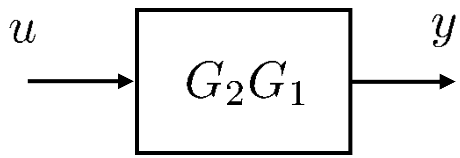
表 2.2　ブロック線図の結合方式

結合方式	結合前	結合後
直列結合		
並列結合		
フィードバック結合		

直列結合

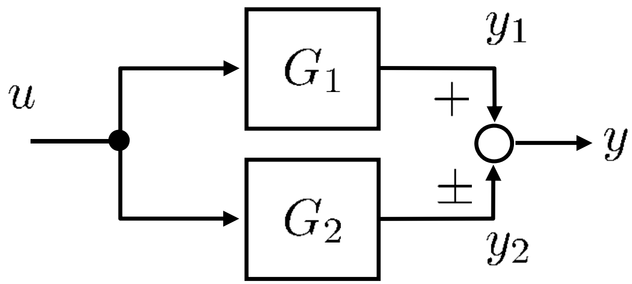


- $y = G_2 z$
- $z = G_1 u$

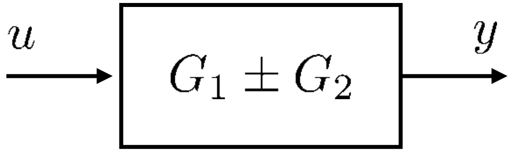


$$y = G_2 G_1 u$$

並列結合



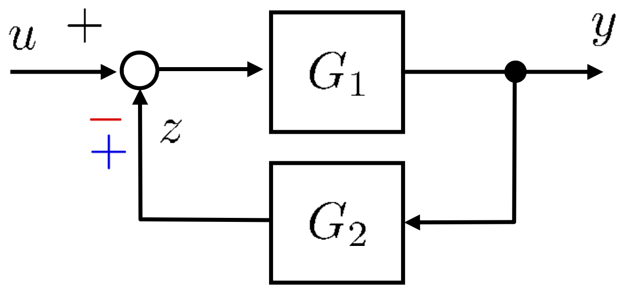
- $y_1 = G_1 u$
- $y_2 = G_2 u$
- $y = y_1 \pm y_2$



$$\begin{aligned} y &= G_1 u \pm G_2 u \\ &= (G_1 \pm G_2)\, u \end{aligned}$$

フィードバック結合

- ネガティブ・フィードバック
- ポジティブ・フィードバック



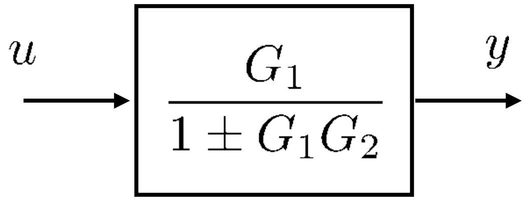
ネガティブ・フィードバック

- $z = G_2 y$
- $y = G_1 (u - z)$

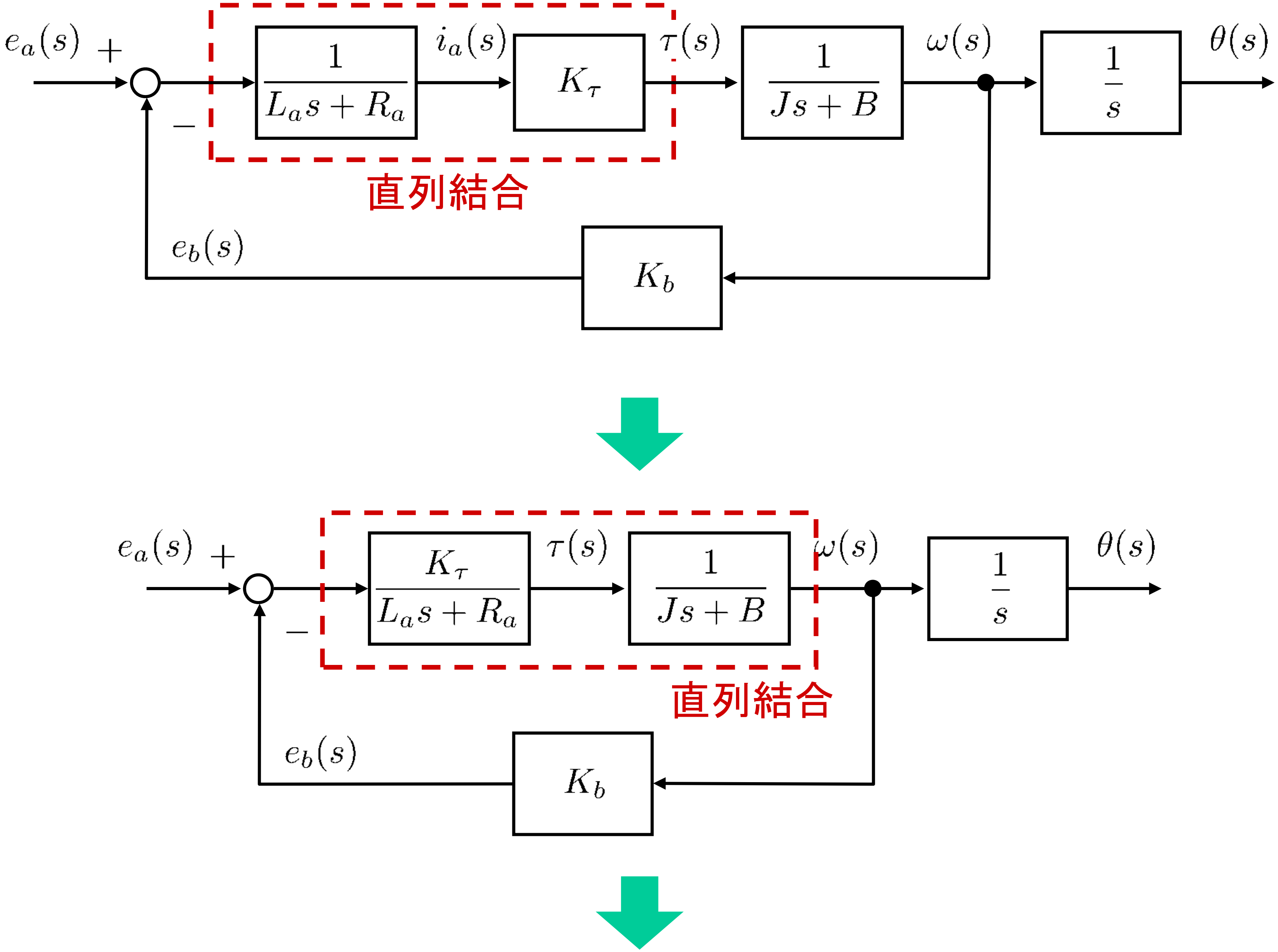
$$y = G_1 (u - G_2 y)$$

$$(1 + G_1 G_2)\, y = G_1 u$$

$$y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} u$$



[例 2.15] DC サーボモータ



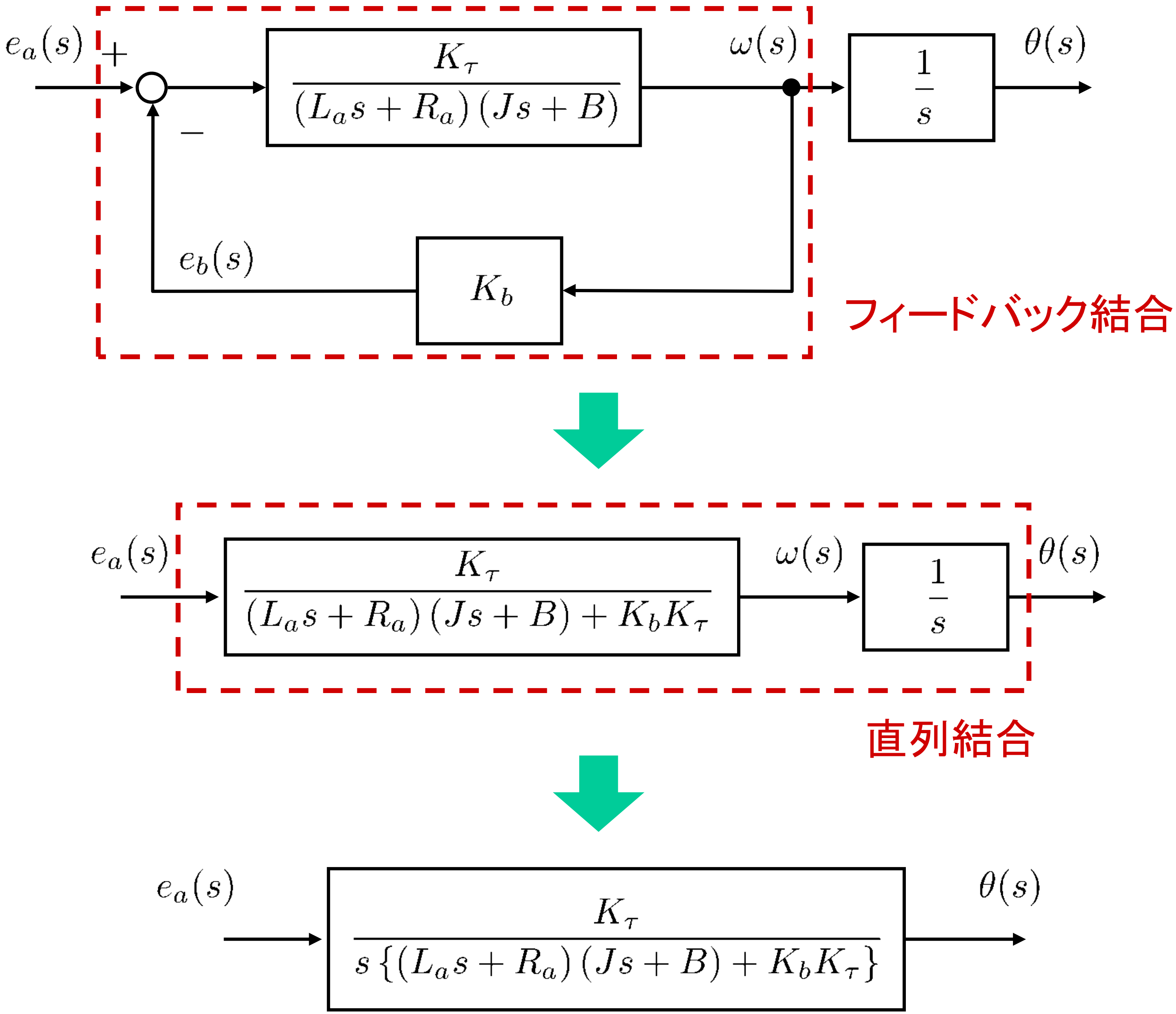
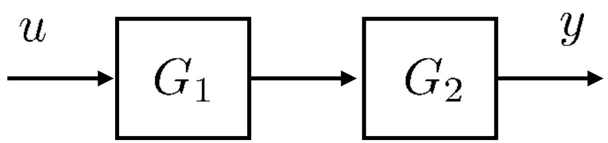
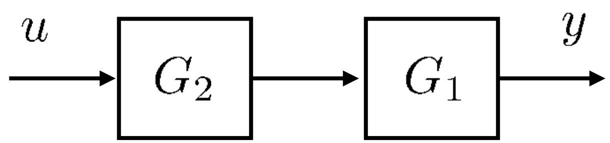
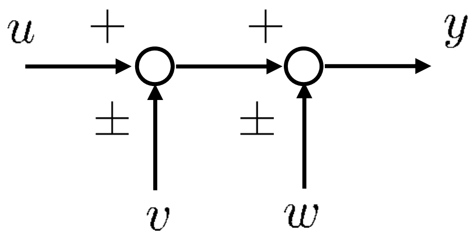
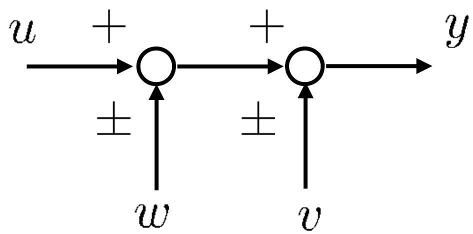
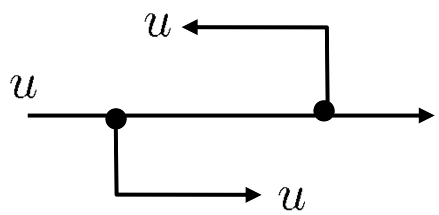
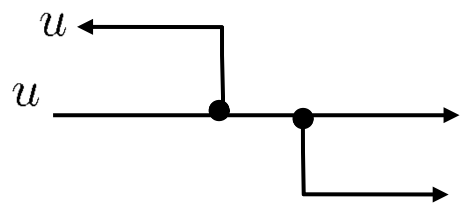
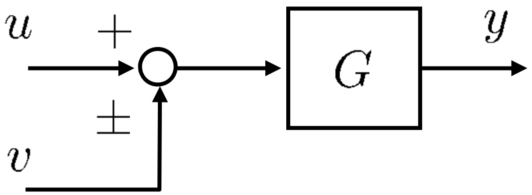
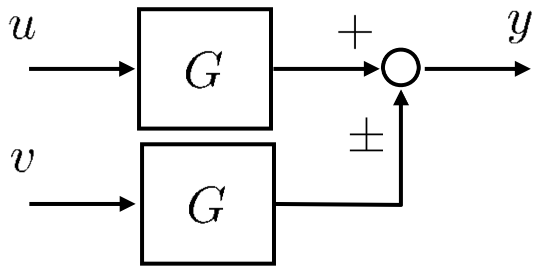
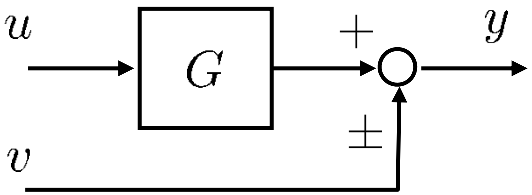
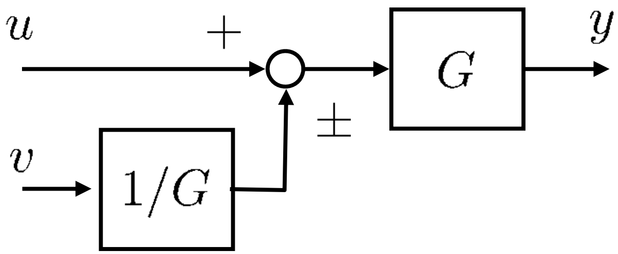
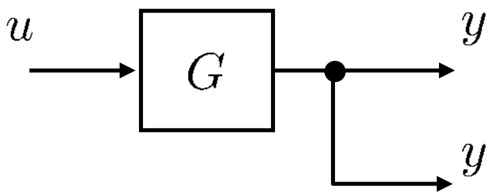
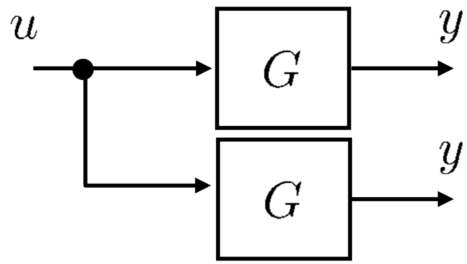
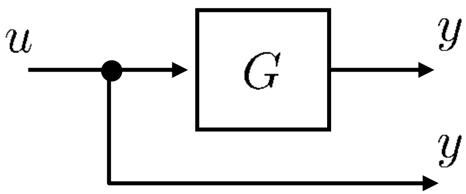
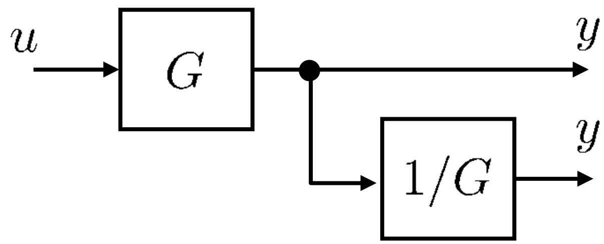


図 2.15 DC サーボモータのブロック線図の簡略化

表 2.3 ブロック線図の等価変換

等価変換	変換前	変換後
ブロックの入れ替え		
加え合せ点の入れ替え		
引き出し点の入れ替え		

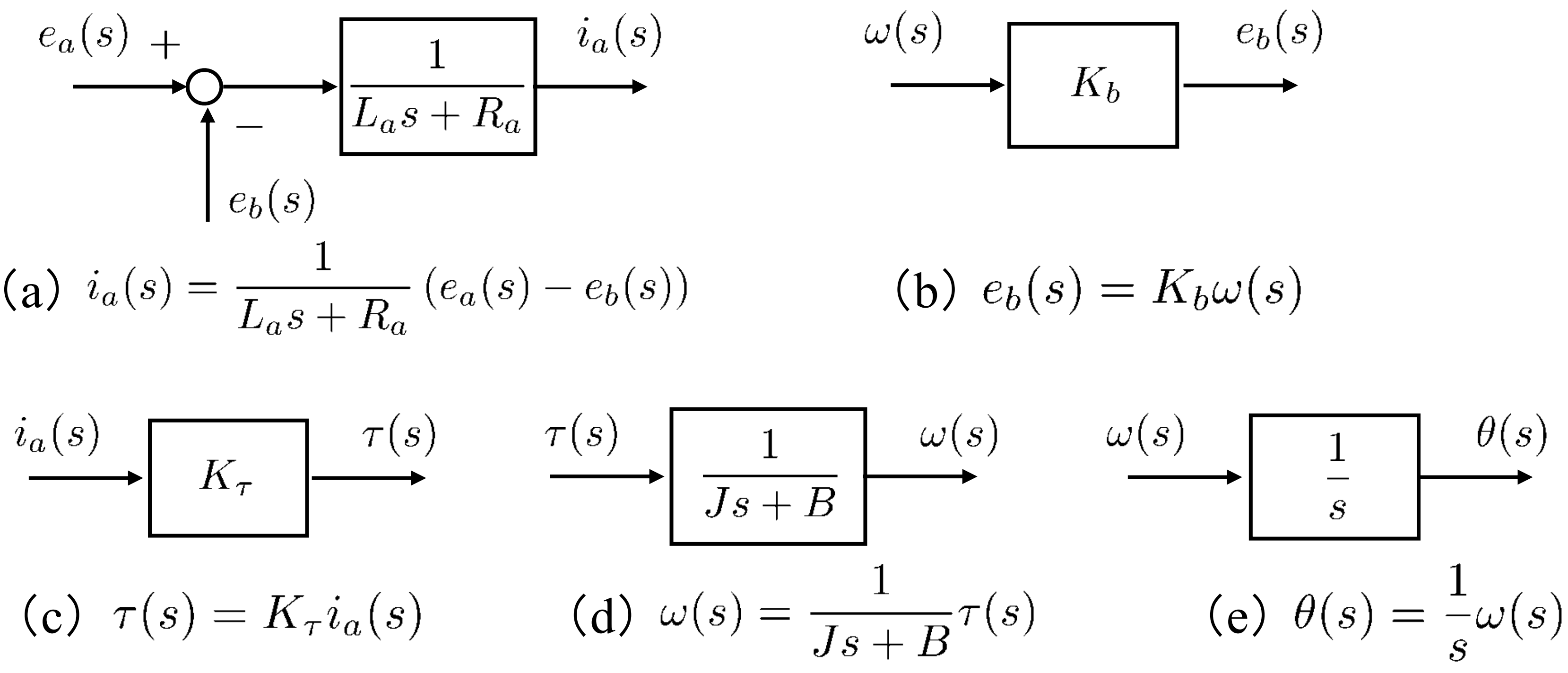
<table>
<tr><th>等価変換</th><th>変換前</th><th>変換後</th></tr>
<tr><td>ブロックと
加え合せ点の
入れ替え(1)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ブロックと
加え合せ点の
入れ替え(2)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ブロックと
引き出し点の
入れ替え(1)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ブロックと
引き出し点の
入れ替え(2)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

第 2 章：ダイナミカルシステムの表現

2.3 ブロック線図

キーワード： ブロック線図，等価変換

学習目標：伝達関数で表された要素の結合と信号の流れのようすを，ブロック線図により表す方法を習得する。



（a）$i_a(s) = \frac{1}{L_a s + R_a}\left(e_a(s) - e_b(s)\right)$　　（b）$e_b(s) = K_b \omega(s)$

（c）$\tau(s) = K_\tau i_a(s)$　　（d）$\omega(s) = \frac{1}{Js + B}\tau(s)$　　（e）$\theta(s) = \frac{1}{s}\omega(s)$

図 2.13　DC サーボモータの各部のブロック線図

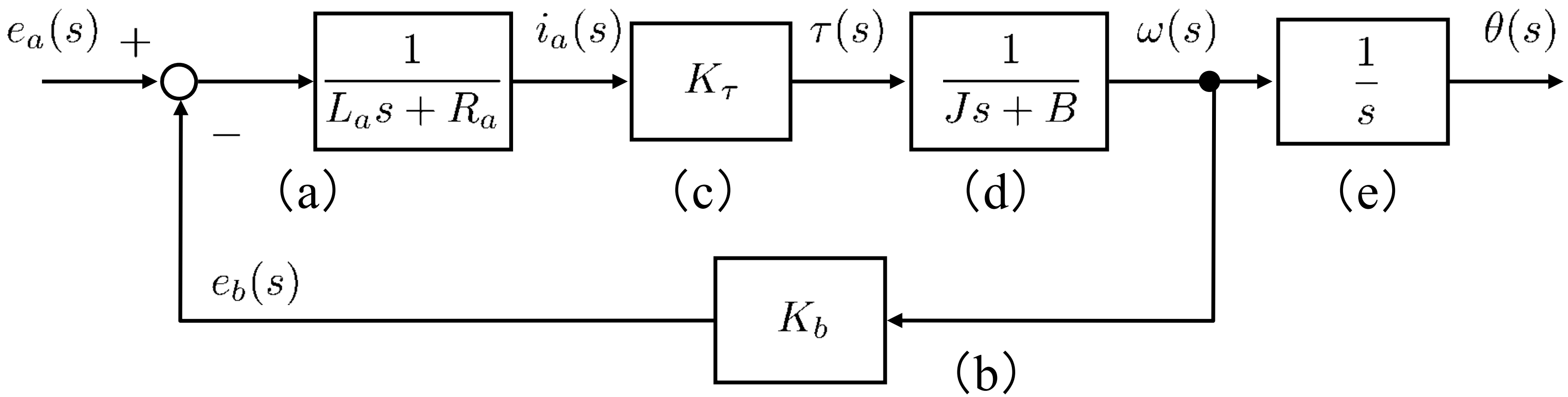
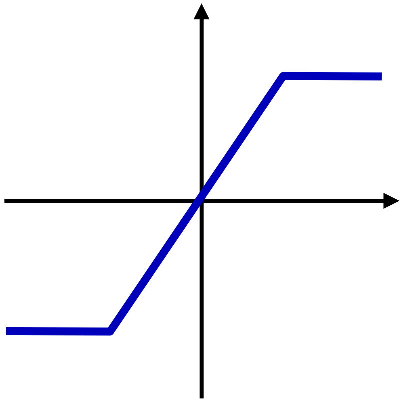


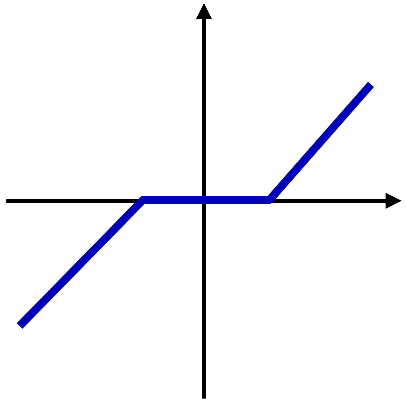
図 2.14　DC サーボモータの全体のブロック線図

非線形要素

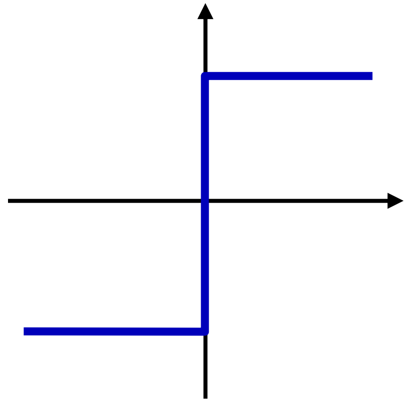
代表的な非線形要素



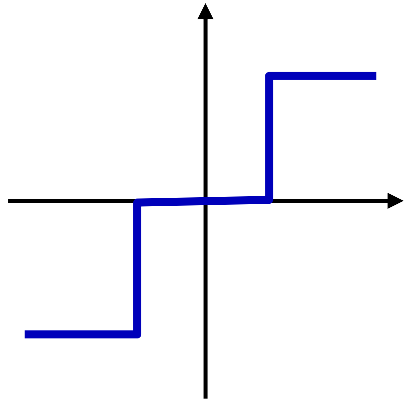
(a) 飽和



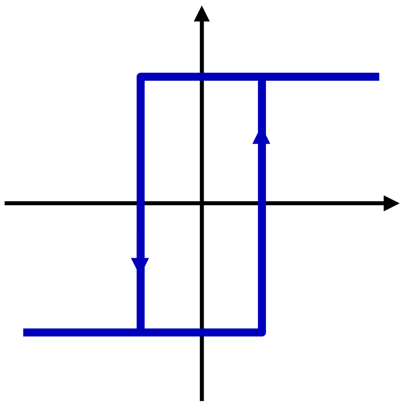
(b) 不感帯



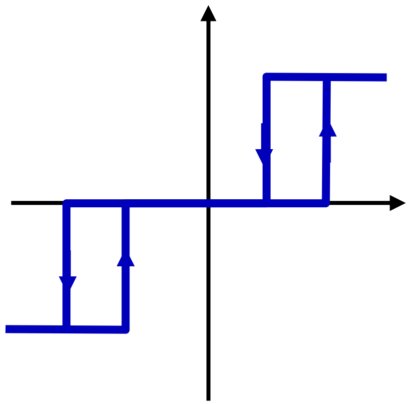
(c) 二位置リレー



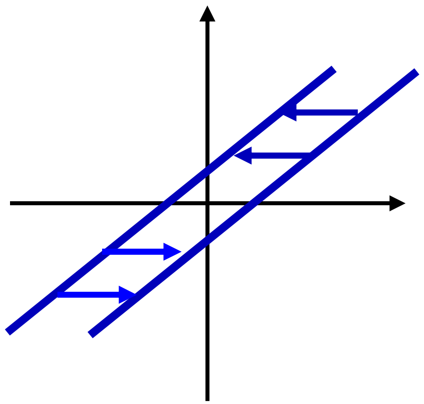
(d) 三位置リレー



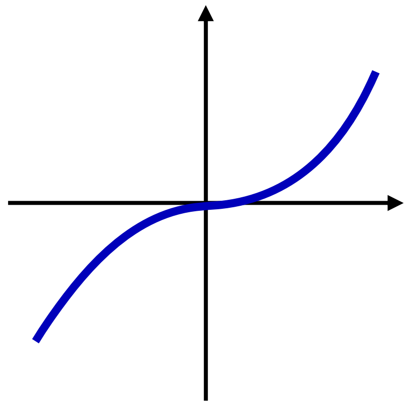
(e) 二位置リレー
(ヒステリシスあり)



(f) 三位置リレー
(ヒステリシスあり)



(g) バックラッシュ



(h) わん曲

[例 2.12] 磁気浮上系

- $M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = Mg - k\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2$
- $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t)$

$x(t) = x_0 + \delta x(t),\ \ i(t) = i_0 + \delta i(t)$

$e(t) = e_0 + \delta e(t)$

線形化 $\left(\dfrac{i(t)}{x(t)}\right)^2 = \left(\dfrac{i_0}{x_0}\right)^2 + \cdots$

- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$
- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

$$K_x = \frac{2ki_0^2}{x_0^3},\ \ K_i = \frac{2ki_0}{x_0^2}$$

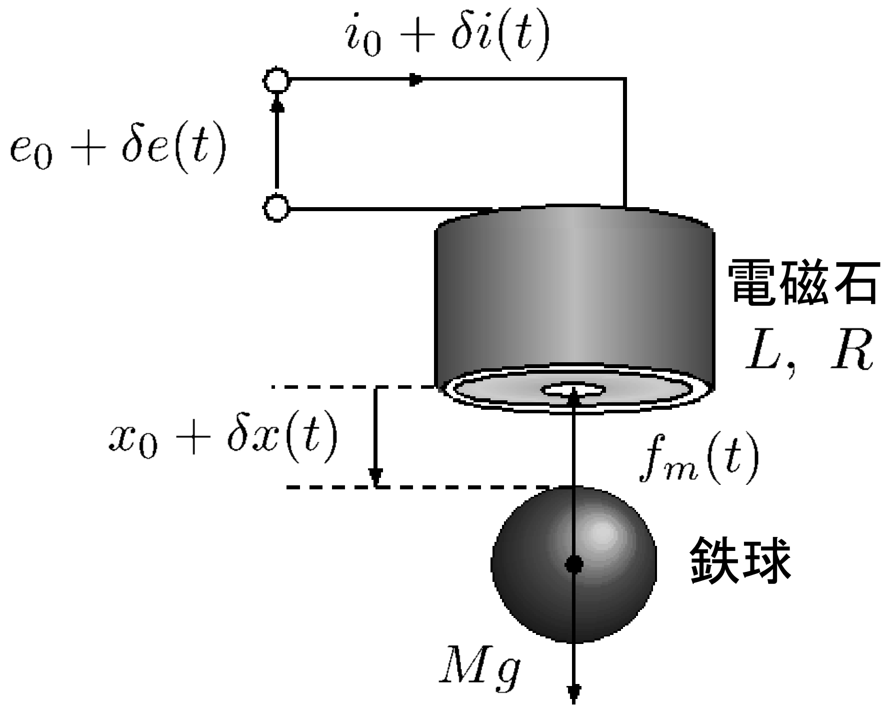


図 2.9　磁気浮上系

$\delta e(t)$: 入力

$\delta x(t)$: 出力

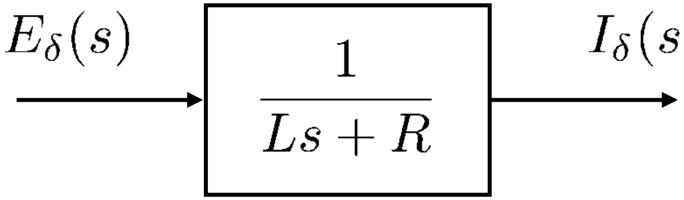
- $M\dfrac{d^2\delta x(t)}{dt^2} = K_x\delta x(t) - K_i\delta i(t)$

ラプラス変換

$$X_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta x(t)]$$
$$I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$$

（すべての初期値$=0$）

$$Ms^2X_\delta(s) = K_xX_\delta(s) - K_iI_\delta(s)$$
$$\Rightarrow \quad X_\delta(s) = \frac{-K_i}{Ms^2-K_x}I_\delta(s)$$



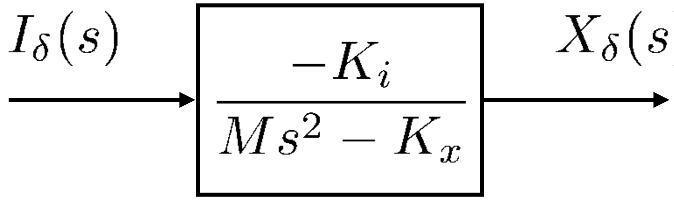
- $L\dfrac{d\delta i(t)}{dt} + R\delta i(t) = \delta e(t)$

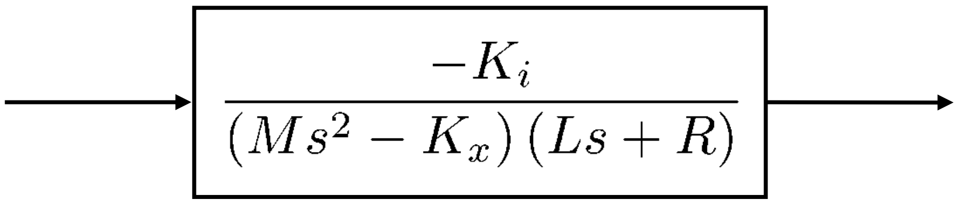
ラプラス変換

$$I_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta i(t)]$$
$$E_\delta(s) = \mathcal{L}[\delta e(t)]$$

（すべての初期値$=0$）

$$LsI_\delta(s) + RI_\delta(s) = E_\delta(s)$$
$$\Rightarrow \quad I_\delta(s) = \frac{1}{Ls+R}E_\delta(s)$$

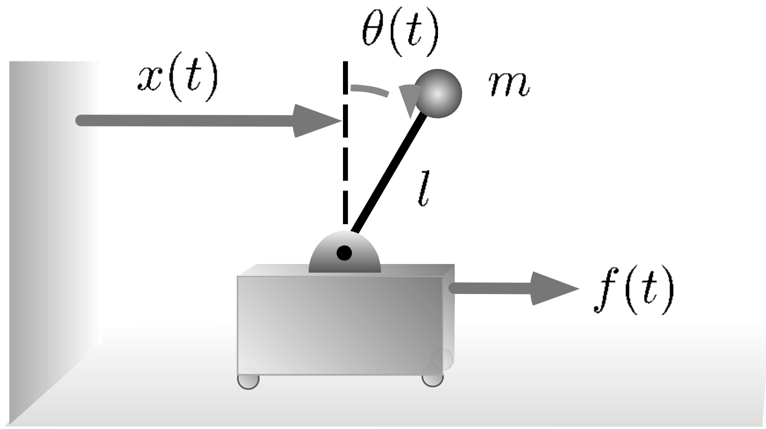




伝達関数

$$G(s) = \frac{-K_i}{(Ms^2-K_x)(Ls+R)}$$

[2章 演習問題【4】] 倒立振子



- $M\ddot{x}(t) + m\dfrac{d^2}{dt^2}\left(x(t) + l\sin\theta(t)\right) = f(t)$
- $ml\ddot{\theta}(t) = mg\sin\theta(t) - m\ddot{x}(t)\cos\theta(t)$

式整理

- $(M+m)\,\ddot{x}(t) - ml\underline{\dot{\theta}^2(t)}\,\underline{\sin\theta(t)} + ml\ddot{\theta}(t)\,\underline{\cos\theta(t)} = f(t)$
- $ml\ddot{\theta}(t) + m\ddot{x}(t)\,\underline{\cos\theta(t)} = mg\,\underline{\sin\theta(t)}$

非線形項

線形化

$\theta(t) \approx 0$ であるとき,

$$\sin\theta(t) \approx \theta(t), \quad \cos\theta(t) \approx 1, \quad \dot{\theta}^2(t) \approx 0$$

$$\sin\theta(t) = \theta(t) - \frac{\theta^3(t)}{3!} + \cdots$$

$$\cos\theta(t) = 1 - \frac{\theta^2(t)}{2!} + \cdots$$

- $(M+m)\,\ddot{x}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = f(t)$
- $ml\ddot{\theta}(t) + m\ddot{x}(t) = mg\theta(t)$

- $(M+m)\,\ddot{x}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = f(t)$

ラプラス変換

$$x(s) = \mathcal{L}[x(t)],\ \ \theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$$
$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

- $(M+m)\,s^2 x(s) + mls^2\theta(s) = f(s)$

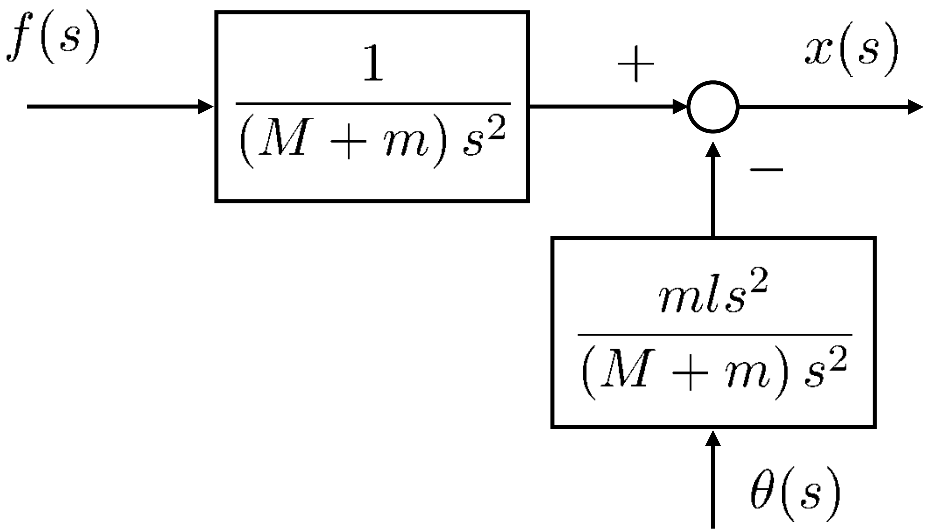
$$\Rightarrow\ x(s) = \frac{1}{(M+m)\,s^2} f(s) - \frac{mls^2}{(M+m)\,s^2}\theta(s)$$

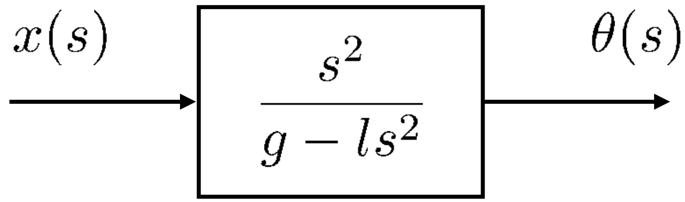
- $ml\ddot{\theta}(t) + m\ddot{x}(t) = mg\theta(t)$

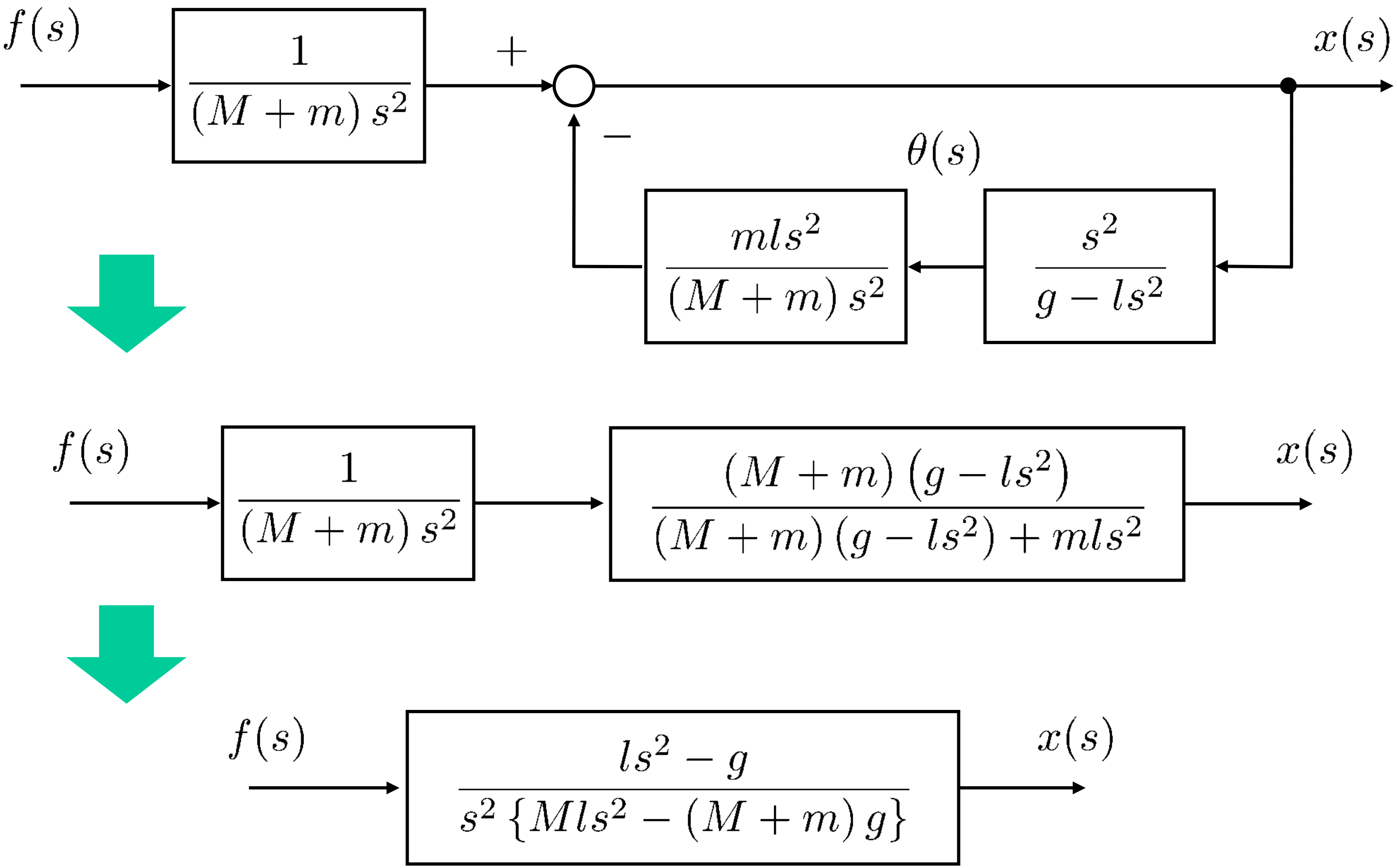
ラプラス変換

- $mls^2\theta(s) + ms^2 x(s) = mg\theta(s)$

$$\Rightarrow\ \theta(s) = \frac{s^2}{g - ls^2} x(s)$$







伝達関数

$$G(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{ls^2 - g}{s^2\{Mls^2 - (M+m)g\}}$$