第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.1 インパルス応答とステップ応答

キーワード： インパルス応答，ステップ応答

学習目標：インパルス応答とステップ応答について理解する。

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.1 インパルス応答とステップ応答

ダイナミカルシステムの微分方程式表現

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\
&\qquad = b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)
\end{aligned}
$$

「微分する」$\longrightarrow$「 s をかける」

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)],\ U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

伝達関数表現

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (n \geq m)$$

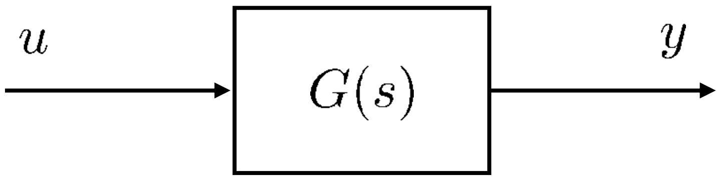


図 3.1　線形ダイナミカルシステム

システム（伝達関数表現）

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (n \geq m)$$

極（pole）:　$D(s) = 0$ の根

零点（zero）: $N(s) = 0$ の根

プロパー（proper）:　$n \geq m$

真に（厳密に）プロパー:　$n > m$
（strictly proper）

[例題]

(1) $\dfrac{1}{s+1}$　　$n=1,\ m=0$

極 : -1

零点 : なし

(2) $\dfrac{s}{s^2+s+1}$　　$n=2,\ m=1$

極 : $\dfrac{-1\pm j\sqrt{3}}{2}$

零点 : 0

(3) $\dfrac{s}{s+1}$　　$n=1,\ m=1$

極 : -1

零点 : 0

(4) s　　$n=0,\ m=1$　　プロパーでない

極 : なし

零点 : 0

代表的な入力信号

単位インパルス関数（デルタ関数）

デルタ関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[\delta_\varepsilon(t)] = 1$$

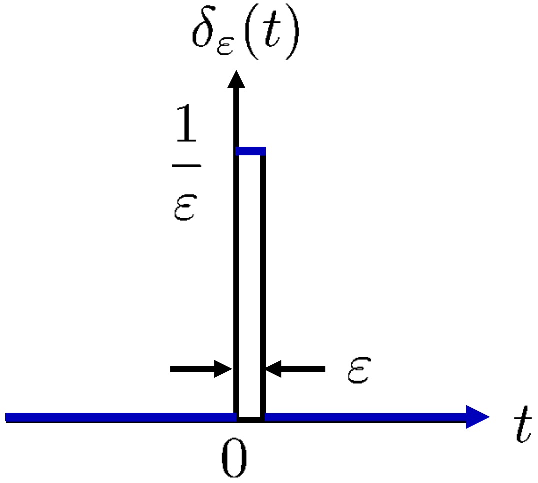


図 3.2（a） インパルス関数

単位ステップ関数

ステップ関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[u_s(t)] = \frac{1}{s}$$

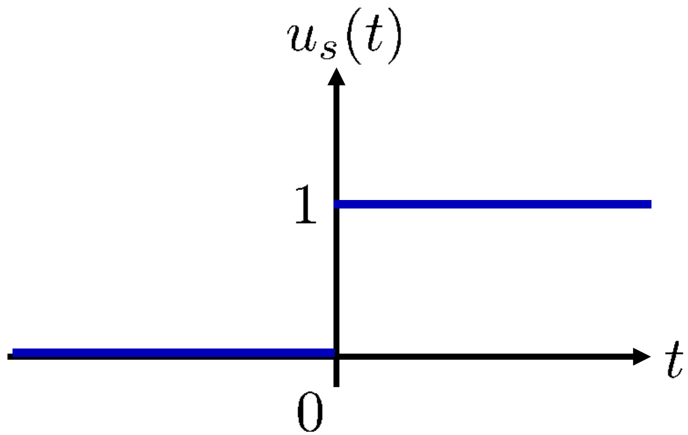


図 3.2（b） ステップ関数

図 3.2 インパルス関数とステップ関数

応答(出力)

$$y(s) = G(s)u(s) \;\Rightarrow\; y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)u(s)\right]$$

インパルス応答 $u(s) = 1$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\cdot 1\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = g(t)$$

インパルス応答は，伝達関数を逆ラプラス変換したもの

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right] = G(s)$$

伝達関数は，インパルス応答をラプラス変換したもの

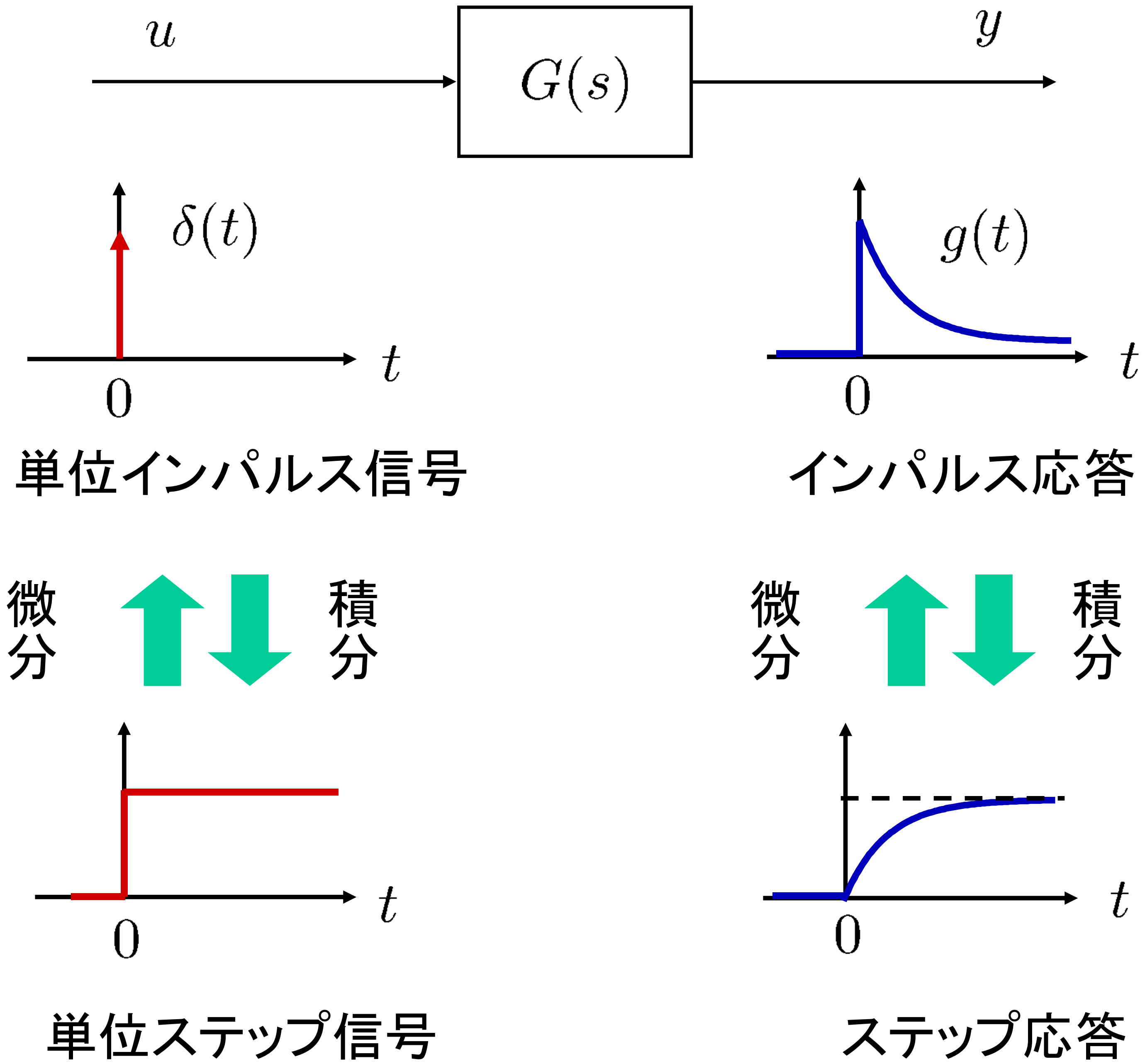
ステップ応答（インディシアル応答） $u(s) = \dfrac{1}{s}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right]$$

ステップ応答は，インパルス応答を時間積分したもの

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}G(s)$$

$$\int_0^t g(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]$$



u
$G(s)$
y
$\delta(t)$
t
0
単位インパルス信号
$g(t)$
t
0
インパルス応答
微分
積分
微分
積分
t
0
単位ステップ信号
t
0
ステップ応答

ステップ応答の利点

・単純にステップ入力を加えればよいので実験的に応答を得やすい.

・ステップ応答から制御対象をモデル化することができる.

・実際の制御系において，目標値がステップ状に変化する場合が多く，これに対する応答でシステムの良否を判断することが一般的である.

たたみこみ積分

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

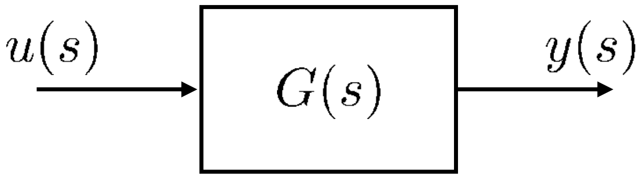
$$= \int_{-\infty}^{0} g(t-\tau)\underbrace{u(\tau)}_{\substack{=0 \\ \text{因果信号}}}d\tau + \int_{0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t}^{\infty} \underbrace{g(t-\tau)}_{\substack{=0 \\ \text{因果システム}}}u(\tau)d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

ラプラス変換

（出力）＝（伝達関数）×（入力）

$$y(s) = G(s)u(s)$$



$$u(s) = \mathcal{L}\left[u(t)\right],\ G(s) = \mathcal{L}\left[g(t)\right],\ y(s) = \mathcal{L}\left[y(t)\right]$$

時間領域における たたみこみ積分 ➡ s 領域では乗算

ラプラス変換の性質

合成積(コンボルーション)

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] \qquad \text{(A.17)}$$

コンボルーション(たたみ込み積分)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)u(s)\right]$$
$$= \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$g(t)$: 重み関数

ダイナミカル

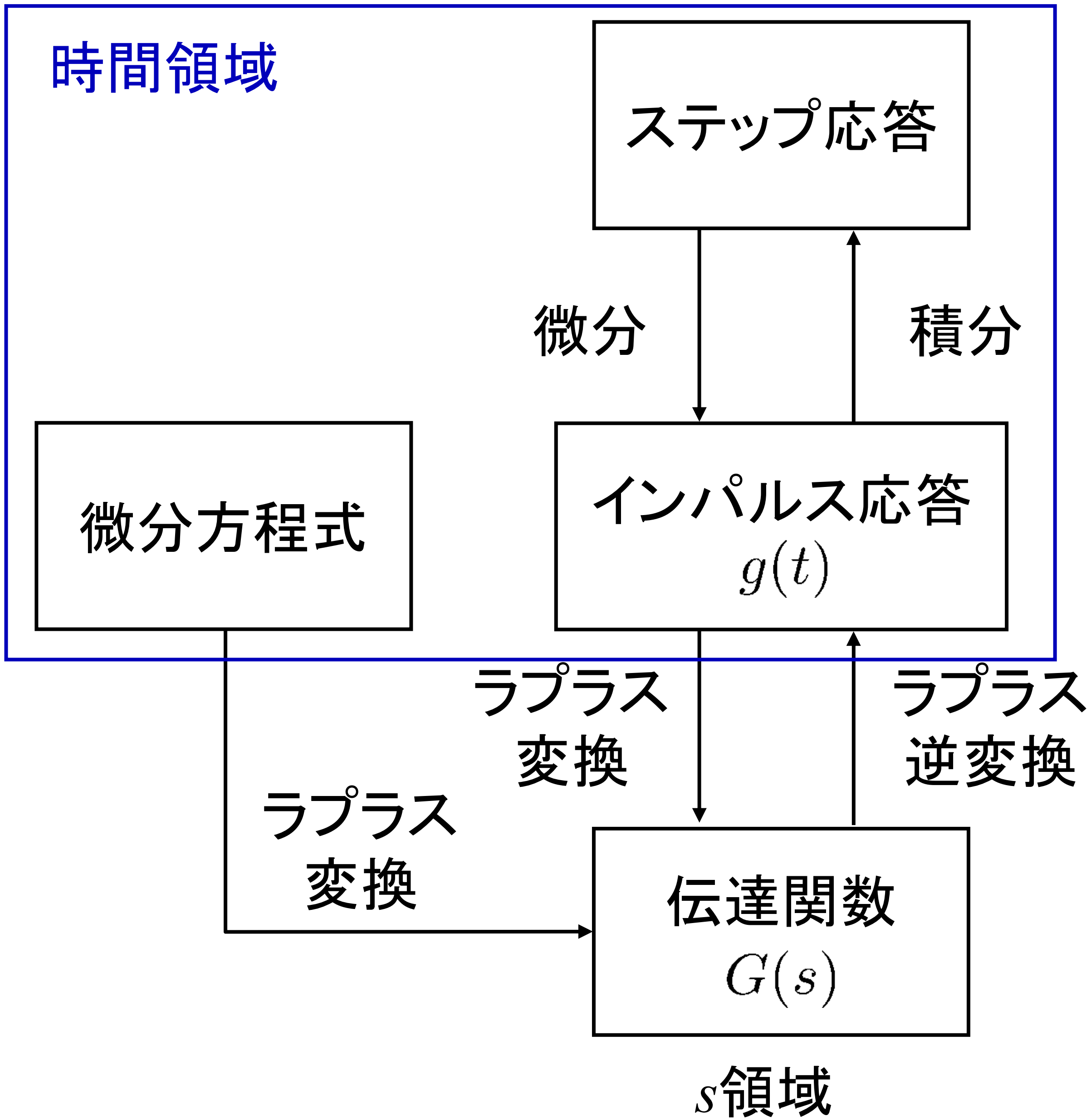


図6.20　LTIシステムの表現形式

足立，信号とダイナミカルシステム，コロナ社，1999.

第 3 章：ダイナミカルシステムの
過渡応答と安定性

3.1 インパルス応答とステップ応答

キーワード： インパルス応答，ステップ応答

学習目標：インパルス応答とステップ応答について理解する。