2021年度 制御工学 I 第6回資料

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.2 1次系の応答

キーワード： 1次系の応答

学習目標：1 次系の過渡応答特性を理解する.

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.2 1次系の応答

1 次系 $G(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$

(分母の次数)=1

インパルス応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K/T}{s+(1/T)}\right]$$
$$= \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

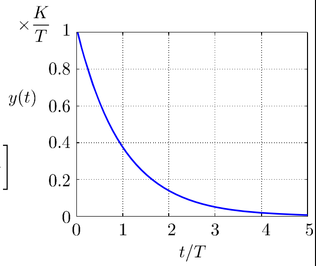
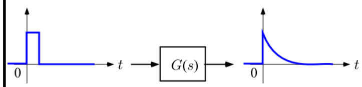


図 3.3 インパルス応答(1 次系)



ラプラス変換の基本公式

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s+a}\right] = be^{-at}$$

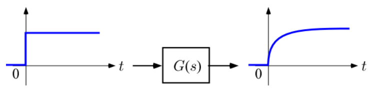
ステップ応答

インパルス応答の積分だから

$$y(t) = \int_0^t \frac{K}{T}e^{-\frac{\tau}{T}}d\tau = \frac{K}{T}\left[-Te^{-\frac{\tau}{T}}\right]_0^t = K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

(別解)ステップ応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1}\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}K\left[\frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}K\left[\frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}K\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]$$
$$= K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



定常値

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right) = K$$
$$\left(\because \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{T}} = 0\right)$$

・時刻 $t=T$ において定常値の 63.2 % になる.

$$y(T) = K\left(1-e^{-\frac{T}{T}}\right) = K\left(1-e^{-1}\right)$$
$$= K(1-0.368) = 0.632 \cdot K$$

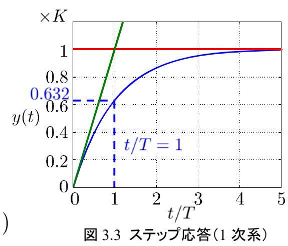


図 3.3 ステップ応答(1 次系)

初期速度

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{K}{T}$$

・初期速度のまま進めば, T 秒後に定常値に到達する.

【別解】定常値

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to0} sy(s) = \lim_{s\to0}\left[\cancel{s}\cdot G(s)\frac{1}{\cancel{s}}\right])$$
$$= \lim_{s\to0} G(s)$$
$$= G(0)$$
$$= \frac{K}{T\cdot0+1} = K$$

直流ゲイン(DC gain)

最終値定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to0} sF(s) \qquad \text{(A.16)}$$

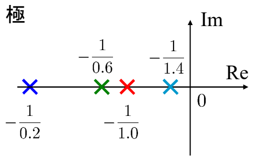
・定常値は入力の大きさの K 倍になる.

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{K}{T\cdot0+1} = K$$

T:時定数
K:ゲイン

T :時定数 K :ゲイン

極



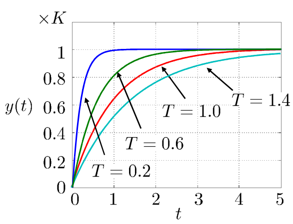


図 3.4 種々の時定数 T に対する応答

[例]

$G_1(s) = \dfrac{2}{s+1}$, $G_2(s) = \dfrac{1}{2s+1}$

(1) どちらが速く立ち上がるか

時定数 $G_1(s) : 1$, $G_2(s) : 2$

よって，$G_1(s)$ が速く立ち上がる

(2) 定常値はいくつか

ゲイン $G_1(s) : 2$, $G_2(s) : 1$

よって，定常値は

$G_1(s) : 2$, $G_2(s) : 1$

7

[例 2.9] RC 回路

$e_i(t)$: 入力

$e_o(t)$: 出力

$$RC\frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$

ラプラス変換

$E_i(s) = \mathcal{L}[e_i(t)]$

$E_o(s) = \mathcal{L}[e_o(t)]$

(すべての初期値 = 0)

$$RCsE_o(s) + E_o(s) = E_i(s)$$

$$(RCs+1)\,E_o(s) = E_i(s)$$

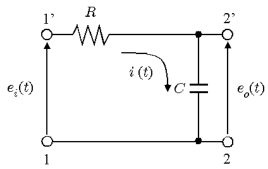


図 2.8 RC回路

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

時定数 $T = RC$

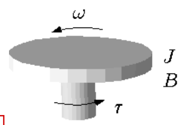
8

[例 3.1] 回転運動系

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) = \tau(t)$$

入力 $u(t) = \tau(t)$

出力 $y(t) = \omega(t)$



ラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\omega(t)}{dt}\right] = Js\omega(s)$$

$$\mathcal{L}[\omega(t)] = \omega(s)$$

$$\mathcal{L}[\tau(t)] = \tau(s)$$

$$Js\omega(s) + B\omega(s) = \tau(s)$$

$$(Js+B)\,\omega(s) = \tau(s)$$

$$\omega(s) = \frac{1}{Js+B}\tau(s)$$

$$\omega(s) = \frac{1/B}{(J/B)s+1}\tau(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{\tau(s)} = \frac{1/B}{(J/B)s+1}$$

$\omega(t)$: 角速度

J : 慣性モーメント

B : 粘性摩擦係数

$\tau(t)$: 入力トルク

9

$$G(s) = \frac{(1/B)}{(J/B)s+1} \qquad G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$J/B \leftrightarrow T$

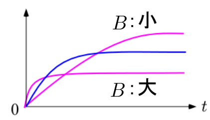
$1/B \leftrightarrow K$

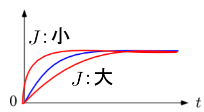
$J \rightarrow$ 大 $\leftrightarrow$ $T \rightarrow$ 大

定常状態 $d\omega/dt = 0$

$G(0) = \dfrac{1}{B} \leftrightarrow G(0) = K$

Jに依存しない





10

第 3 章 : ダイナミカルシステムの
過渡応答と安定性

3.2 1次系の応答

キーワード : 1次系の応答

学習目標 : 1 次系の過渡応答特性を理解する.

11