第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.3 2 次系の応答

キーワード： 2 次系の応答

学習目標： 2 次系の過渡応答特性について理解する.

1

---

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性
3.3 2次系の応答

2 次系（2 次遅れ系）

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \zeta,\ \omega_n,\ K：正定数$$

$(0 \le)\zeta < 1$ のとき

極：$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

$$\left(\begin{array}{l} 極(\mathrm{pole})：D(s) = 0 の根 \\ G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$= \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\sigma} \pm j\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

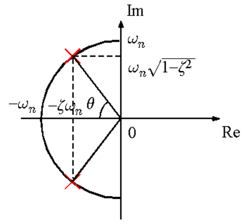


図 3.8 2次系の極の位置

2

複素共役根

$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_d$

$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_d$

$\omega_d := \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

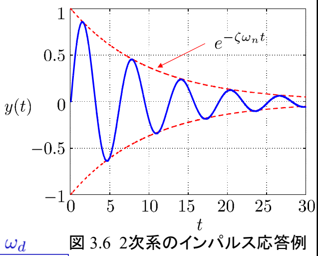


図 3.6 2次系のインパルス応答例

インパルス応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\overbrace{\boxed{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}}^{\omega_d}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \underbrace{\boxed{(1-\zeta^2)\,\omega_n^2}}_{\omega_d^2}}\right]$$

$$= \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}}_{収束の速さ} \sin(\underbrace{\omega_d t}_{振動の周波数})$$

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = e^{-at}\sin(\omega t)\right)$$

3

ステップ応答

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\cos(\omega t) \\ a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \\ \quad = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega t + \phi) \\ \qquad\qquad \phi = \tan^{-1}\dfrac{a}{b} \end{array}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right]$$

部分分数展開

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K\,(s+\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{K\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right]$$

$$= K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right)\right\}$$

$$= K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta)\right\} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

4

$\zeta = 1$ のとき 重根 $-\zeta\omega_n$

ステップ応答

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\omega_n t}\,(1 + \omega_n t)\right\}$$

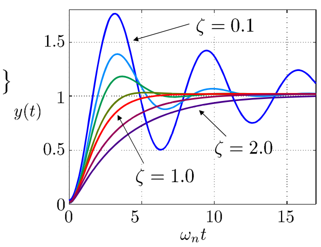


図 3.7 2次系のステップ応答

$\zeta > 1$ のとき 2 実根

ステップ応答

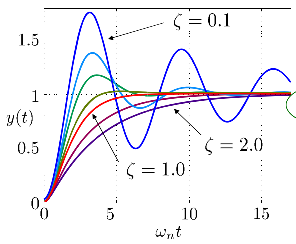
$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta}\left((\zeta+\beta)\,e^{\omega_n\beta t} - (\zeta-\beta)\,e^{-\omega_n\beta t}\right)\right\}$$

$$\beta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

5

$$\left\{\begin{array}{lll} \zeta < 1 & 不足制動 & 振動する \\ \zeta = 1 & 臨界制動 & \multirow{2}{*}{振動しない} \\ \zeta > 1 & 過制動 & \end{array}\right.$$

極に虚部が存在すると振動する



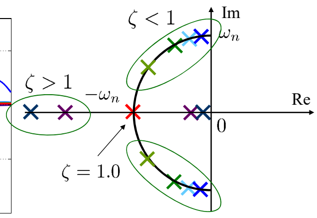


図 3.7 2次系のステップ応答　　図 3.8 2次系の極の位置

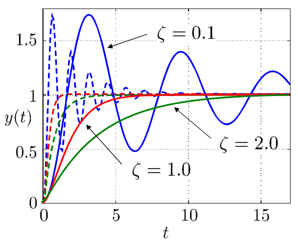
6

横軸 $\omega_n t$

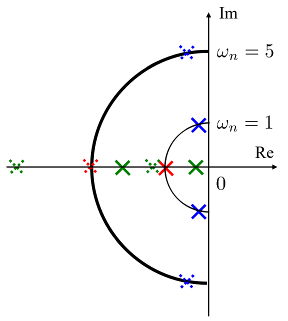
目盛り 10 $\begin{cases} \omega_n = 1,\ t = 10 & \text{——} \\ \omega_n = 5,\ t = 2 & \text{- - -} \end{cases}$

ω_n は原点からの距離

ω_n : 大 ➡ 応答が速くなる



2次系のステップ応答

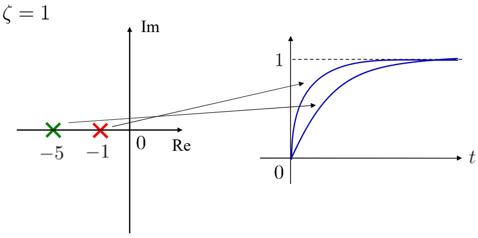


2次系の極の位置

7

[例]

$\zeta = 1$



8

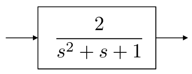
2 次系（2 次遅れ系）

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \zeta,\ \omega_n,\ K : \text{正定数}$$

- ζ は振動減衰（ダンピング）の特性を定める; 減衰係数 ζ
- ω_nは速応性を定める; 自然角周波数（固有角周波数）ω_n
- K はゲイン　$G(0) = K$ 定常値, DC ゲイン

9

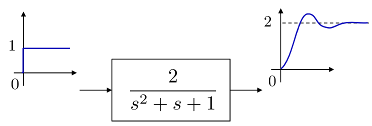
[例]



$\omega_n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 1$　角周波数は 1

$K\omega_n^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad K = 2$　ゲインは 2

$2\zeta\omega_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{1}{2}$　振動する

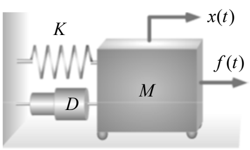


10

[例3.2] 質量ーばねーダンパ系

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{(1/M)}{s^2 + (D_s/M)\,s + (K_s/M)}$$



- 自然角周波数 ω_n が K_s に比例
- 減衰係数 ζ が D_s に比例

11

第 3 章 : ダイナミカルシステムの
過渡応答と安定性

3.3 2 次系の応答

キーワード : 2 次系の応答

学習目標 : 2 次系の過渡応答特性について理解する.

12