第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.3 2 次系の応答

キーワード： 2 次系の応答

学習目標：2 次系の過渡応答特性について理解する.

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.3 2次系の応答

2 次系(2 次遅れ系)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \zeta,\ \omega_n,\ K\ \text{:正定数}$$

$(0 \leq)\zeta < 1$ のとき

極: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

$$\left(\begin{array}{c} \text{極(pole):}\ D(s) = 0\ \text{の根} \\ G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$= \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\sigma} \pm \underbrace{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

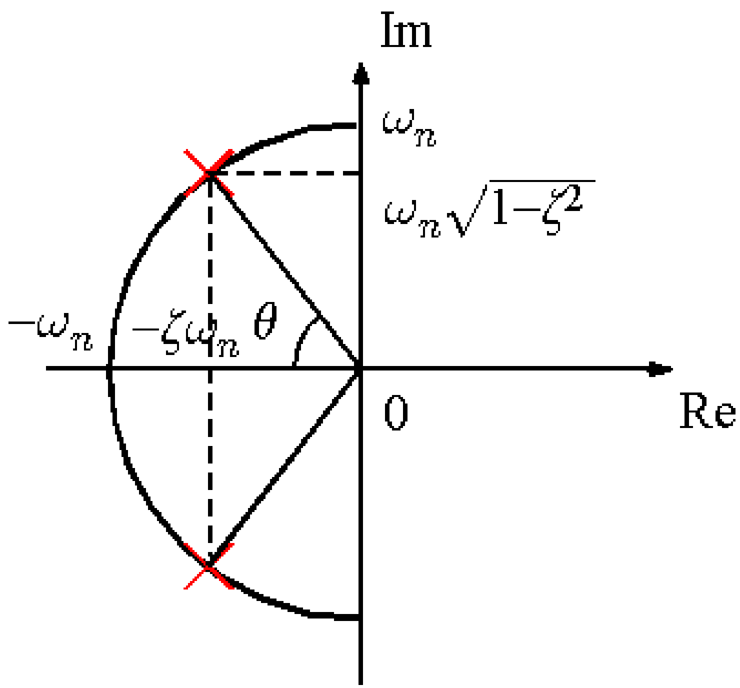


図 3.8 2次系の極の位置

複素共役根

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_d$$
$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_d$$
$$\omega_d := \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

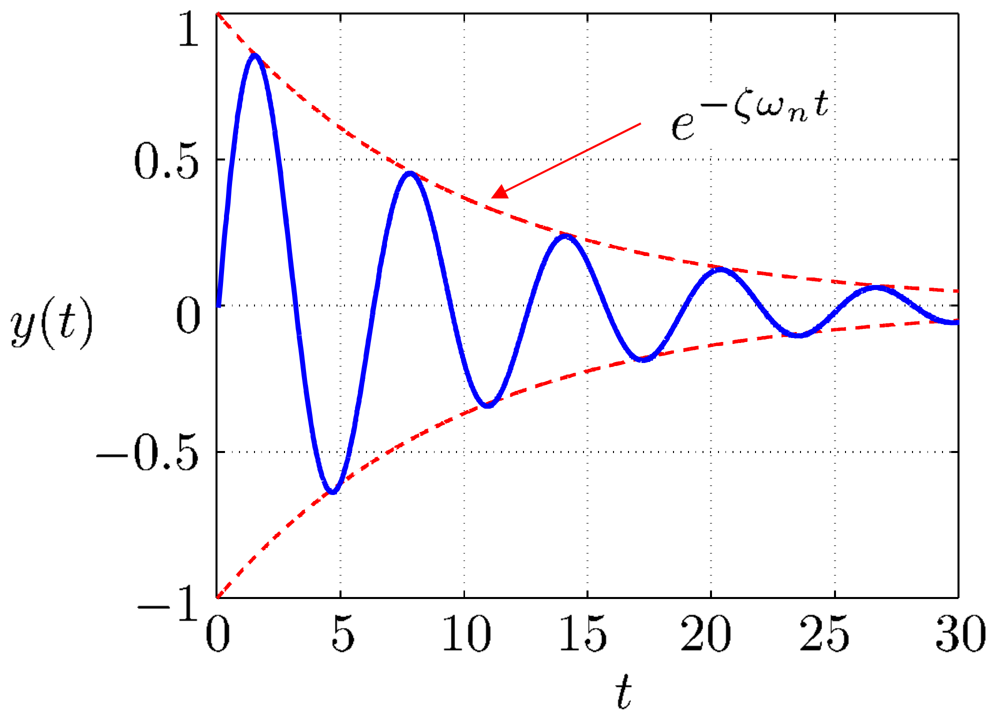


図 3.6 2次系のインパルス応答例

インパルス応答

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\overbrace{\boxed{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}}^{\omega_d}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \underbrace{\boxed{(1-\zeta^2)\,\omega_n^2}}_{\omega_d^2}}\right]$$

$$= \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t)$$

収束の速さ

振動の周波数

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = e^{-at}\sin(\omega t)\right)$$

ステップ応答

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\cos(\omega t)$$

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega t + \phi)$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{a}{b}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}\right]$$

部分分数展開

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K(s+2\zeta\omega_n)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K\left(s+\zeta\omega_n\right)}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2+\omega_d^2} - \frac{K\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{\omega_d}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2+\omega_d^2}\right]$$

$$= K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right)\right\}$$

$$= K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta)\right\} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$\zeta = 1$ のとき　重根 $-\zeta\omega_n$

ステップ応答

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right)\right\}$$

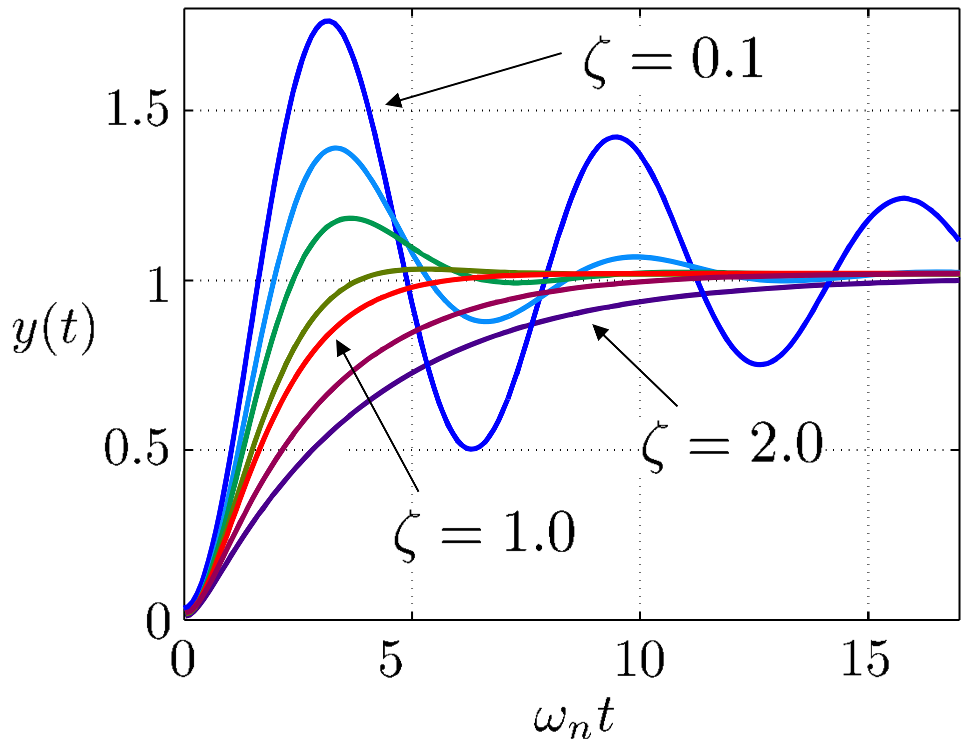


図 3.7 2次系のステップ応答

$\zeta > 1$ のとき　2 実根

ステップ応答

$$y(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta}\left(\left(\zeta+\beta\right)e^{\omega_n \beta t} - \left(\zeta-\beta\right)e^{-\omega_n \beta t}\right)\right\}$$

$$\beta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\begin{cases} \zeta < 1 & \text{不足制動} \\ \zeta = 1 & \text{臨界制動} \\ \zeta > 1 & \text{過制動} \end{cases}$$

- $\zeta < 1$ 不足制動：振動する
- $\zeta = 1$ 臨界制動，$\zeta > 1$ 過制動：振動しない

極に虚部が存在すると振動する

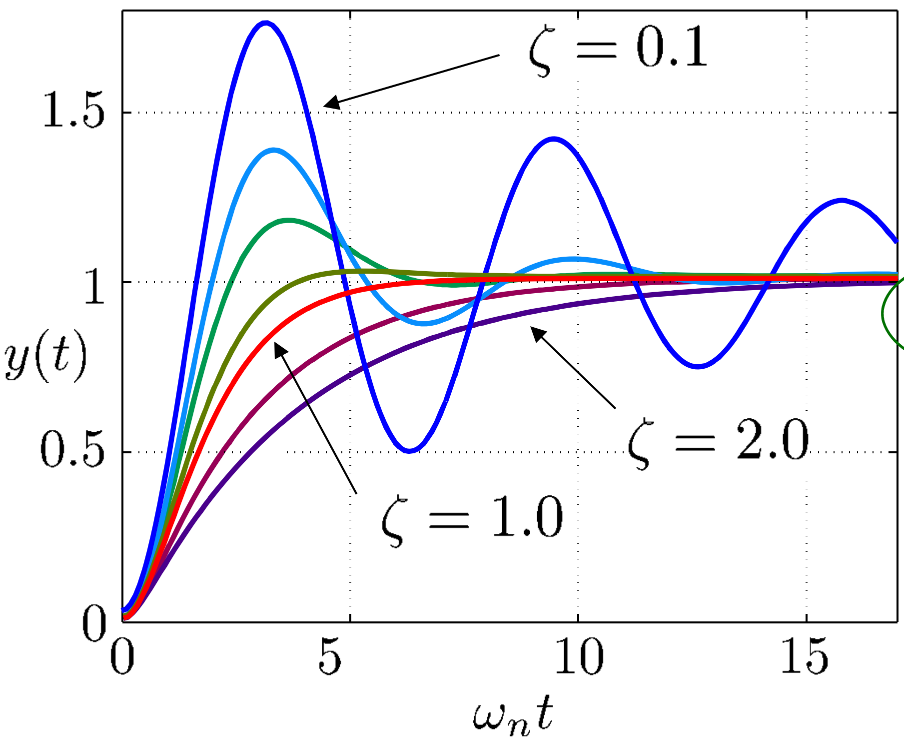


図 3.7 2次系のステップ応答

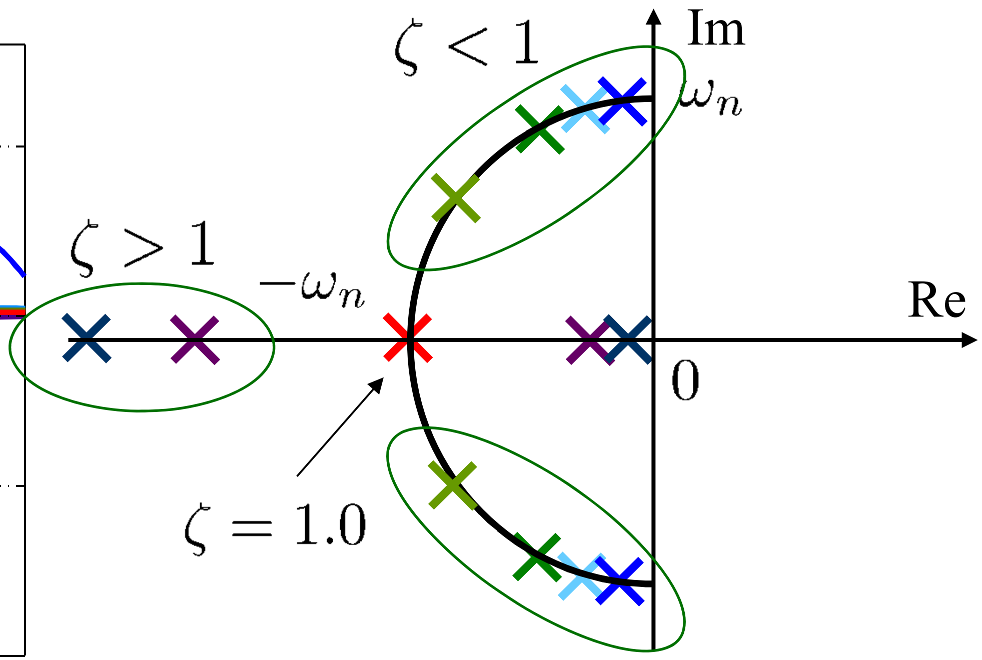


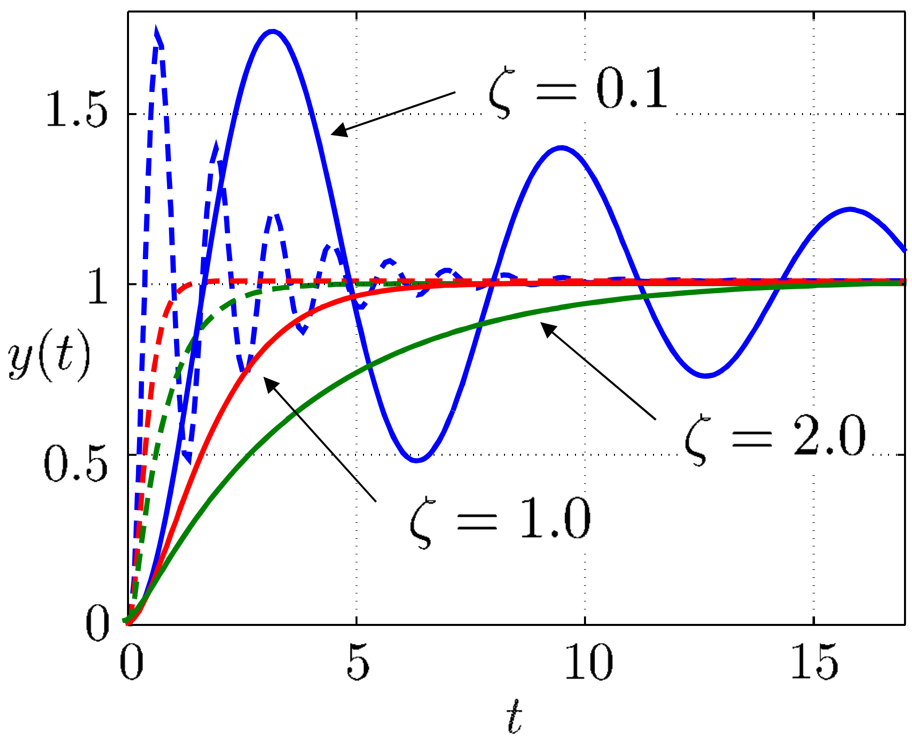
図 3.8 2次系の極の位置

横軸 $\omega_n t$

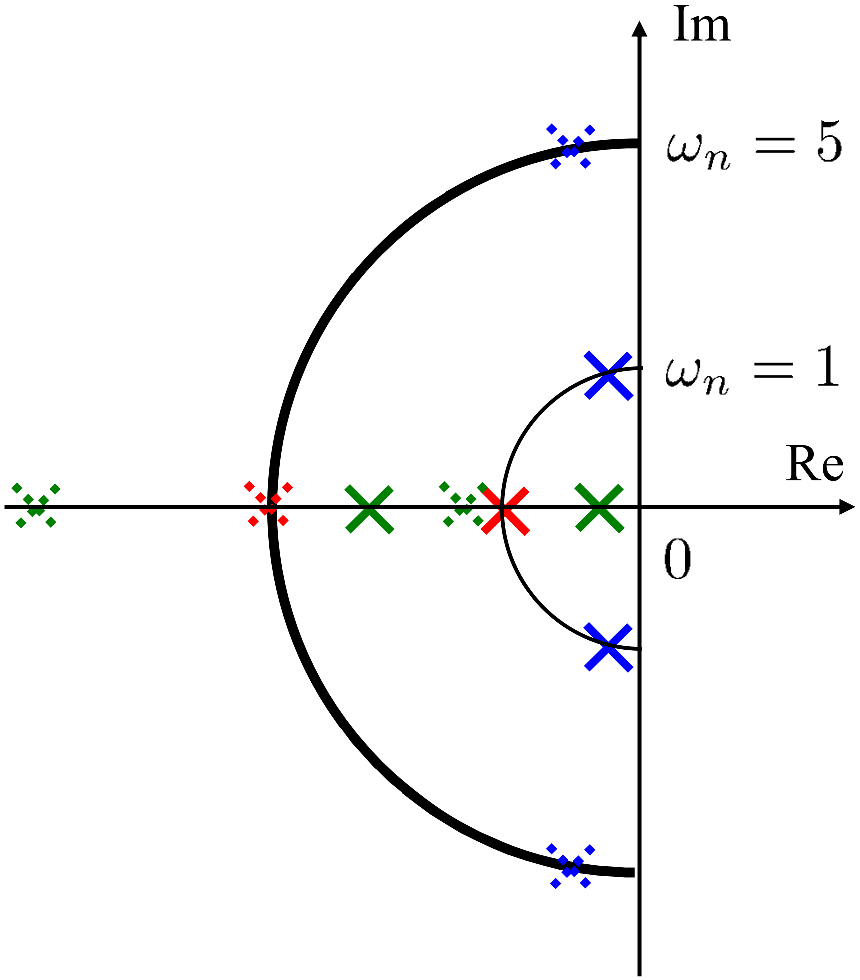
目盛り 10 $\begin{cases} \omega_n = 1,\ t = 10 & \text{———} \\ \omega_n = 5,\ t = 2 & \text{- - -} \end{cases}$

ω_n は原点からの距離

ω_n : 大 ➡ 応答が速くなる



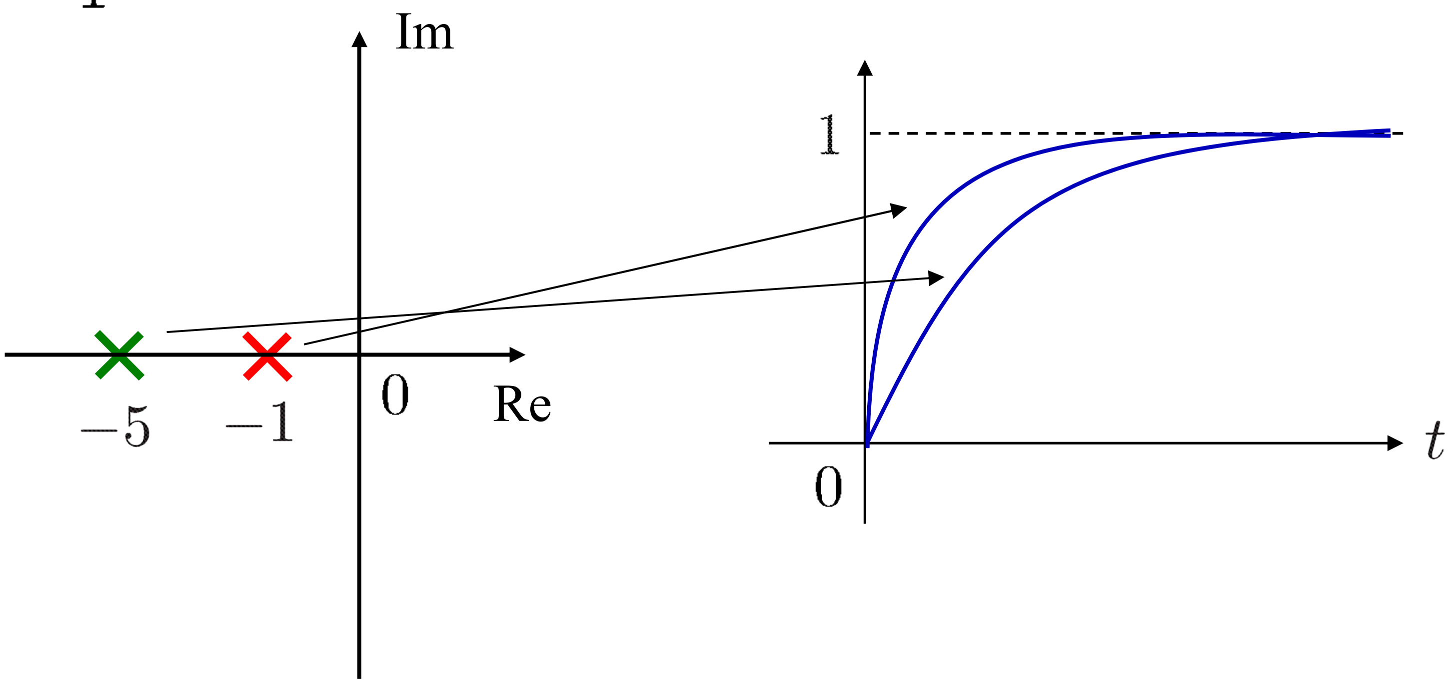
2次系のステップ応答



2次系の極の位置

［例］

$\zeta = 1$

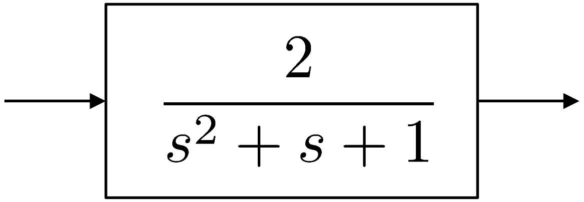


2 次系(2 次遅れ系)

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \zeta,\ \omega_n,\ K: \text{正定数}$$

- ζ は振動減衰(ダンピング)の特性を定める; 減衰係数 ζ
- ω_n は速応性を定める; 自然角周波数(固有角周波数) ω_n
- K はゲイン　$G(0) = K$ 定常値, DC ゲイン

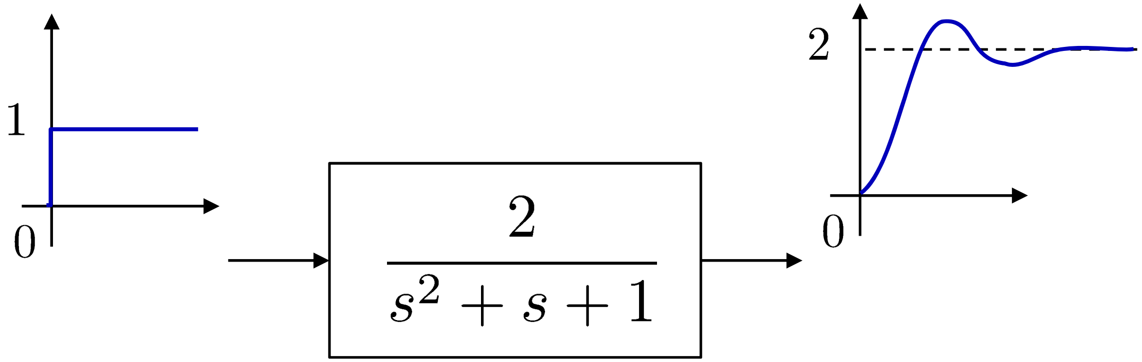
[例]



$$\omega_n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 1 \qquad \text{角周波数は 1}$$

$$K\omega_n^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad K = 2 \qquad \text{ゲインは 2}$$

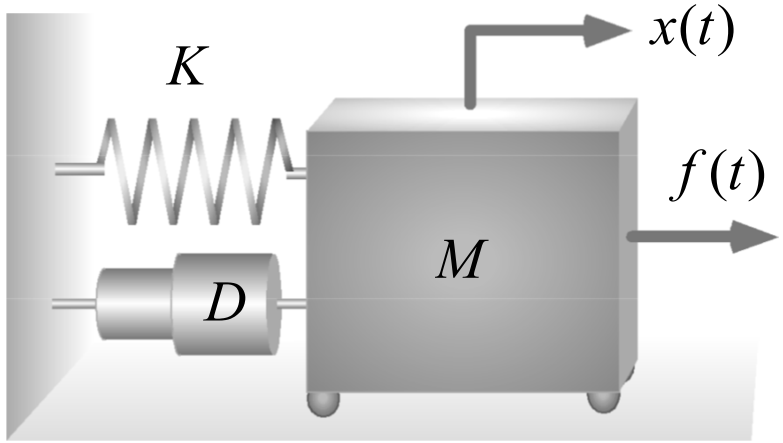
$$2\zeta\omega_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{1}{2} \qquad \text{振動する}$$



［ 例3.2 ］ 質量ーばねーダンパ系

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{(1/M)}{s^2 + (D_s/M)\,s + (K_s/M)}$$



- 自然角周波数 ω_n が K_s に比例
- 減衰係数 ζ が D_s に比例

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.3 2 次系の応答

キーワード： 2 次系の応答

学習目標：2 次系の過渡応答特性について理解する.