第 3 章 ： ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

キーワード ： 過渡応答，極，零点

学習目標 ： 極･零点と過渡応答の関係について理解する。

1

---

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

極とインパルス応答

伝達関数 $G(s)$

実極 $\underbrace{-\sigma_i}_{\text{実部}}(i=1\sim M)$

【例】

$$G(s)=\frac{1}{s+1} \qquad \text{極}\ \ \sigma=-1$$

複素共役極 $\underbrace{-\alpha_i}_{\text{実部}} \pm j\underbrace{\omega_i}_{\text{虚部}}(i=1\sim N)$

【例】

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s+1} \qquad \text{極}\ \ \frac{-1\pm j\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha=\frac{-1}{2},\ \ \omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

インパルス応答（ラプラス変換）

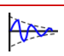
部分分数展開より

$$y(s)=G(s)=\sum_{i=1}^{M}\frac{A_i}{s+\sigma_i}+\sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{(s+\alpha_i)^2+\omega_i^2}$$

インパルス応答

$$y(t)=\sum_{i=1}^{M}A_i\underline{e^{-\sigma_i t}}+\sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{\omega_i}\underline{e^{-\alpha_i t}\sin\omega_i t}$$

1次系



2次系

【例】

$$G(s)=\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\left(\underline{s+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}$$

極の実部　極の虚部

3

極の実部の大きさ: 収束の速さ

極の虚部の大きさ: 振動成分の周期

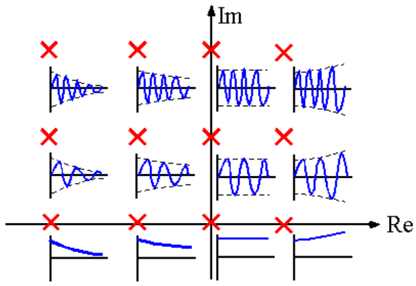


図 3.9 極の位置とインパルス応答

4

ステップ応答（ラプラス変換）

部分分数展開より

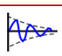
$$y(s)=G(s)\frac{1}{s}=\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{M}\frac{A_i}{s+\sigma_i}+\sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{(s+\alpha_i)^2+\omega_i^2}$$

ステップ応答

$$y(t)=\underline{A_0}+\sum_{i=1}^{M}A_i\underline{e^{-\sigma_i t}}+\sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{\omega_i}\underline{e^{-\alpha_i t}\sin\omega_i t}$$

ステップ入力に対応

1次系



2次系

5

過渡応答に関する特性値

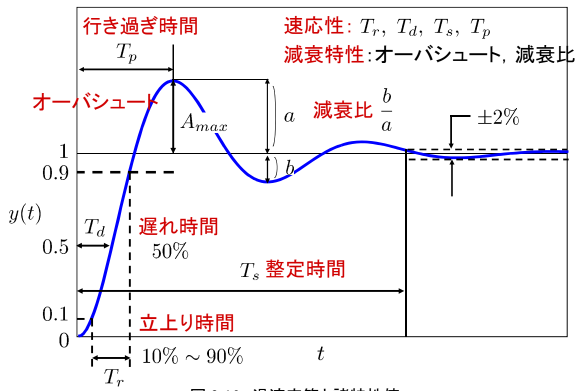


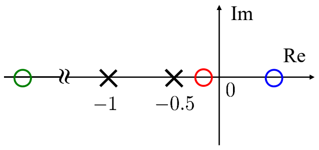
図 3.10 過渡応答と諸特性値

6

零点の影響

［例3.4］

$$G(s) = \frac{as+1}{(s+1)(2s+1)}$$



極: $-1, \ -0.5$ 本来は，振動しない

零点: $-\frac{1}{a}$

$a<0$:（不安定）⇒ 逆ぶれ

a :小 ⇒ 影響なし

a :大 ⇒ オーバシュート

原点に近い極の応答が全体の応答になる。

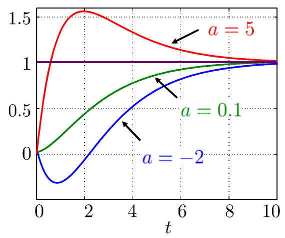


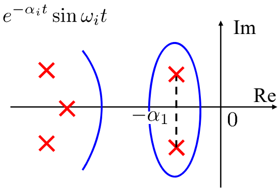
図 3.13 零点の影響

7

代表極

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 \ll \alpha_j \ \ (j = 2 \sim N) \\ 0 < \alpha_1 \ll \sigma_j \ \ (j = 1 \sim M) \end{cases}$$



$e^{-\alpha_j t}$, $e^{-\sigma_j t}$ は急速に減少

最も遅いモードは $e^{-\alpha_1 t}$ が支配

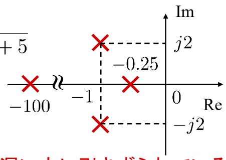
代表極

$$y(t) \approx A_0 + \frac{B_1}{\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t$$

8

［例 3.3］

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{\tau s+1} \cdot \frac{5}{s^2+2s+5}$$



$\tau s + 1 = 0$ ⇒ $s = -\frac{1}{\tau}$

$s^2 + 2s + 5 = 0$ ⇒ $s = -1 \pm j2$

遅い方に引きずられている

- $\tau = 0.01$ $\quad -\frac{1}{\tau} = -100 \quad G \approx G_2$
- $\tau = 4$ $\quad -\frac{1}{\tau} = -0.25 \quad G \approx G_1$

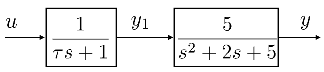


図 3.7 3次系のブロック線図

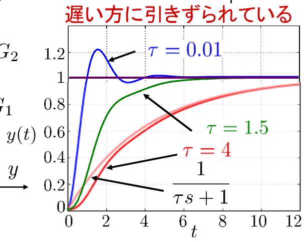


図 3.12 3次系の応答例

9

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

キーワード： 過渡応答，極，零点

学習目標： 極･零点と過渡応答の関係について理解する。

10