第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

キーワード： 過渡応答，極，零点

学習目標： 極･零点と過渡応答の関係について理解する。

3 ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

極とインパルス応答

伝達関数 $G(s)$

実極 $-\sigma_i (i = 1 \sim M)$

実部

【例】

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

極 $\sigma = -1$

複素共役極 $-\alpha_i \pm j\omega_i (i = 1 \sim N)$

実部　　虚部

【例】

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

極 $\dfrac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$

$$\alpha = \frac{-1}{2}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

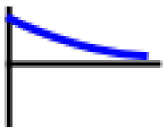
インパルス応答（ラプラス変換）

部分分数展開より

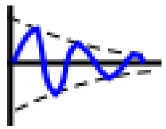
$$y(s) = G(s) = \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s+\sigma_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{(s+\alpha_i)^2+\omega_i^2}$$

インパルス応答

$$y(t) = \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$



1次系



2次系

【例】

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

極の実部　極の虚部

極の実部の大きさ:　収束の速さ

極の虚部の大きさ:　振動成分の周期

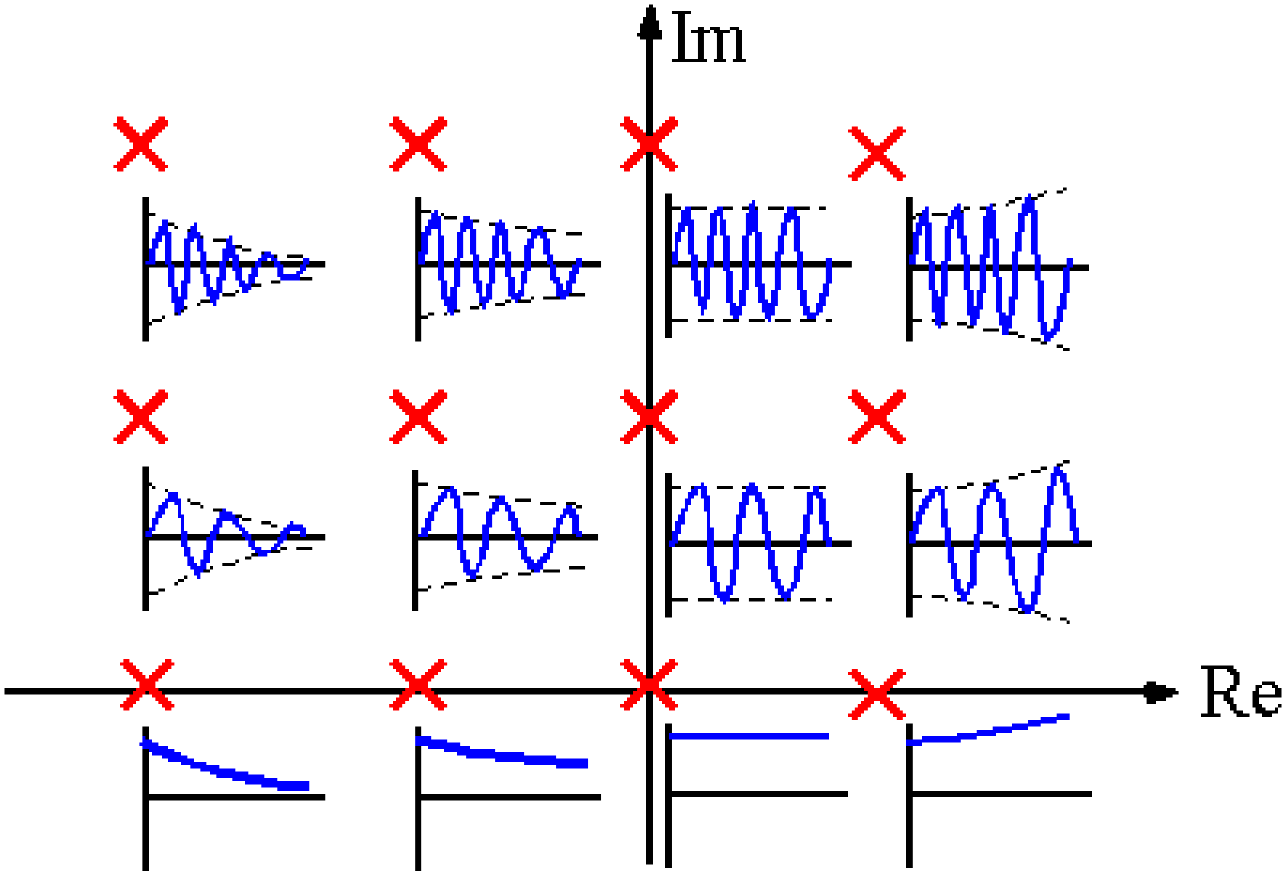


図 3.9　極の位置とインパルス応答

ステップ応答(ラプラス変換)

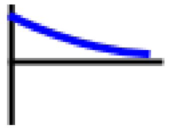
部分分数展開より

$$y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s+\sigma_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{(s+\alpha_i)^2 + \omega_i^2}$$

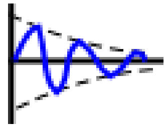
ステップ応答

$$y(t) = \underline{A_0} + \sum_{i=1}^{M} A_i \underline{e^{-\sigma_i t}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} \underline{e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t}$$

ステップ入力
に対応



1次系



2次系

過渡応答に関する特性値

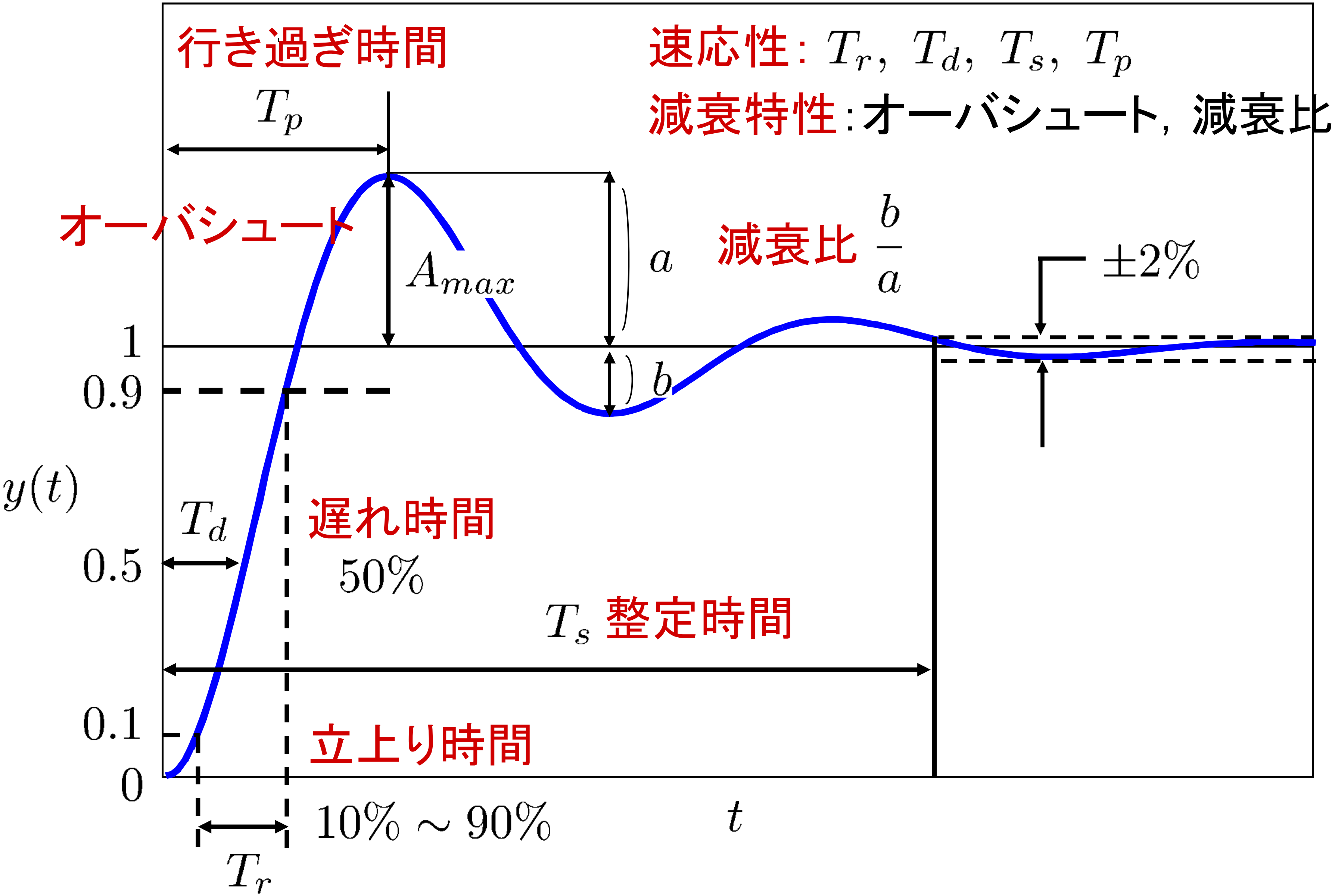
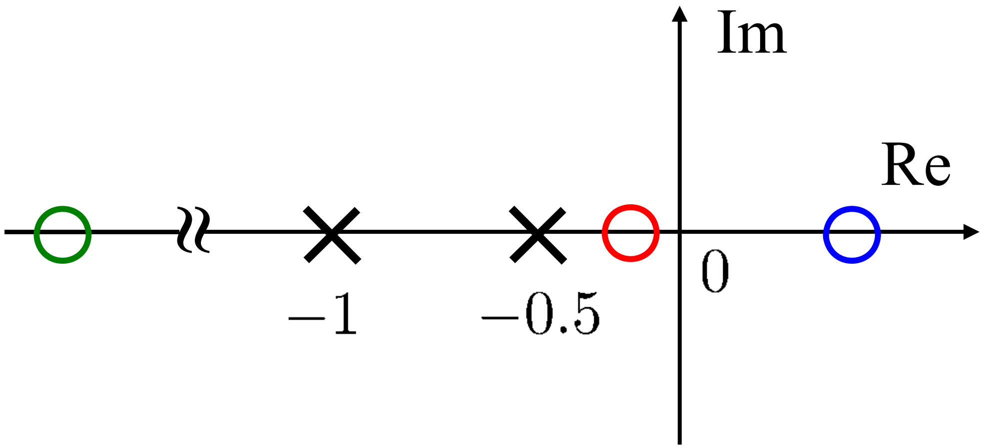


図 3.10　過渡応答と諸特性値

零点の影響

[例3.4]

$$G(s) = \frac{as+1}{(s+1)(2s+1)}$$



極: $-1, \ -0.5$

零点: $-\dfrac{1}{a}$

本来は,
振動しない

$a<0$:（不安定）$\Rightarrow$ 逆ぶれ

a :小 $\Rightarrow$ 影響なし

a :大 $\Rightarrow$ オーバシュート

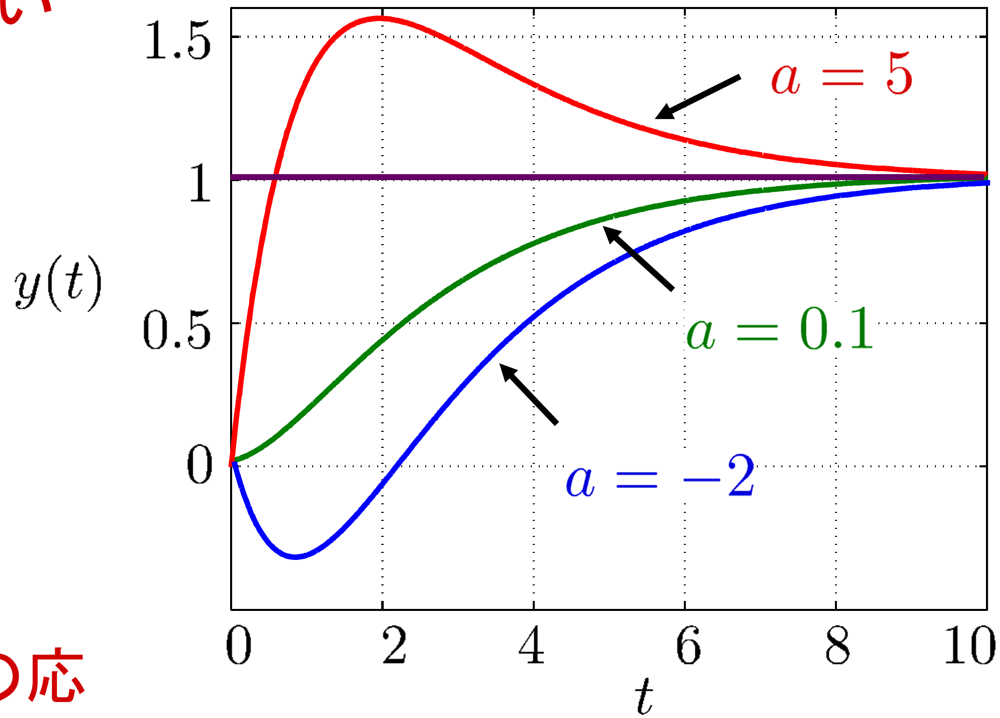
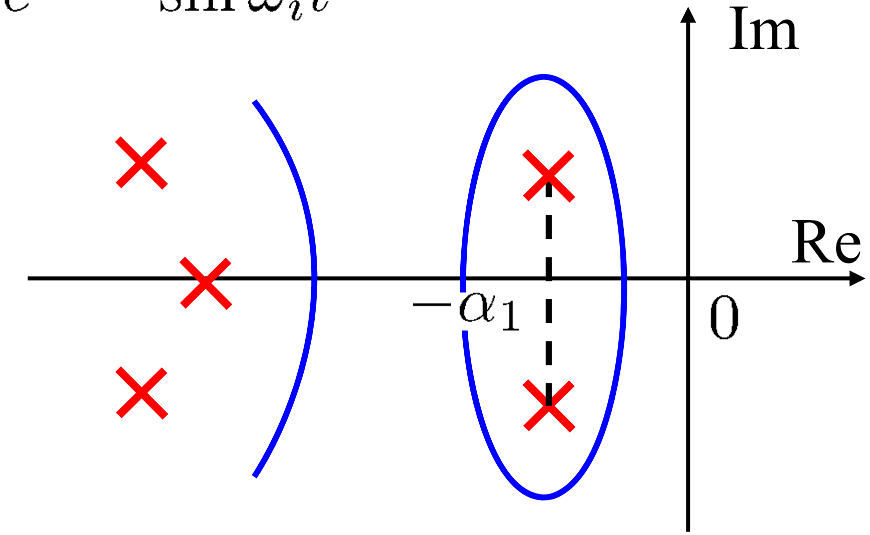


図 3.13 零点の影響

原点に近い極の応答が全体の応答になる。

代表極

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{M} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{\omega_i} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_i t$$



$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 \ll \alpha_j & (j = 2 \sim N) \\ 0 < \alpha_1 \ll \sigma_j & (j = 1 \sim M) \end{cases}$$

$e^{-\alpha_j t}$, $e^{-\sigma_j t}$ は急速に減少

⇒ 最も遅いモードは $\underline{e^{-\alpha_1 t}}$ が支配

代表極

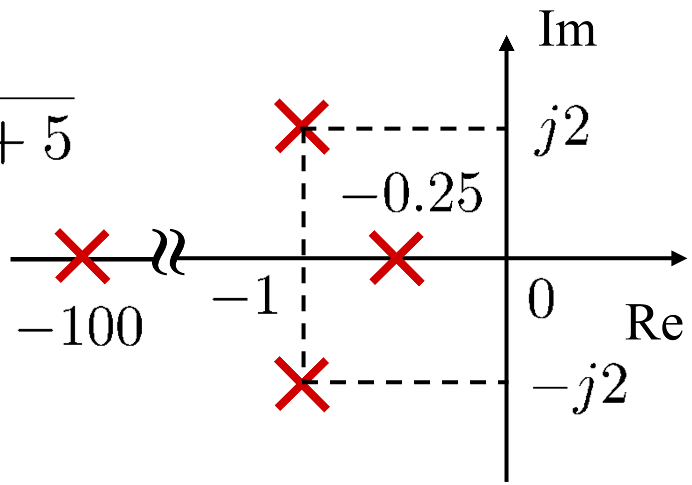
$$y(t) \approx A_0 + \frac{B_1}{\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t$$

[例 3.3]

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

$$\tau s + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{\tau}$$

$$s^2 + 2s + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -1 \pm j2$$



- $\tau = 0.01 \quad -\frac{1}{\tau} = -100 \quad G \approx G_2$
- $\tau = 4 \quad -\frac{1}{\tau} = -0.25 \quad G \approx G_1$

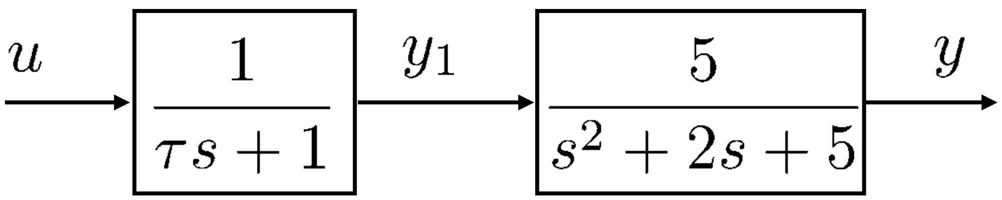


図 3.7 3次系のブロック線図

遅い方に引きずられている

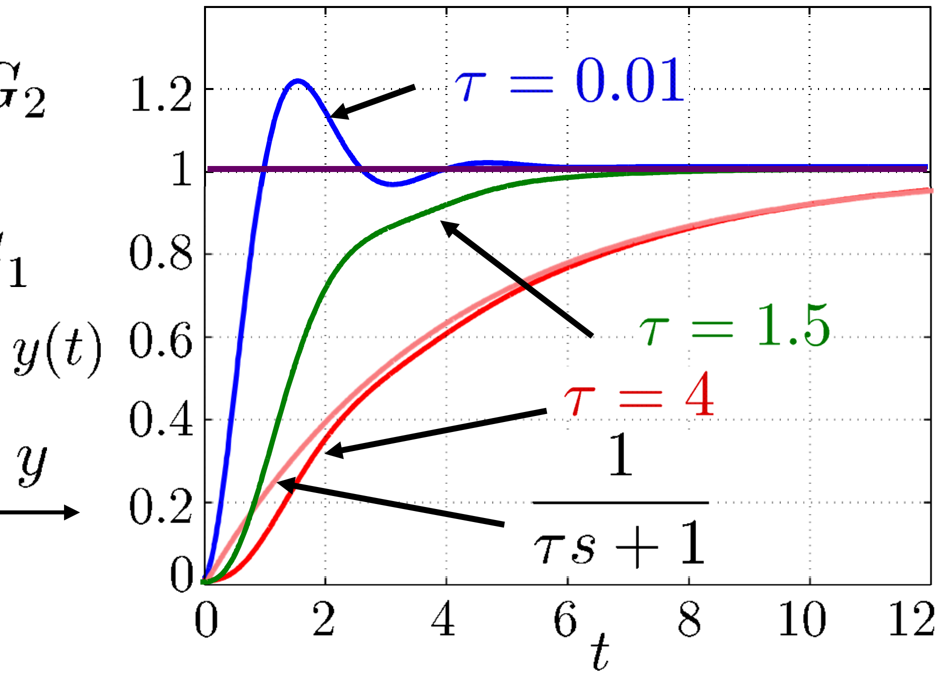


図 3.12 3次系の応答例

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.4 極･零点と過渡応答

キーワード：　過渡応答，極，零点

学習目標：極･零点と過渡応答の関係について理解する。