2021 年度 制御工学 I 第 10 回レポート (模範解答)

4 年 E 科 番号 ________ 氏名 ____________________

[問題 1]　3 章演習問題【10】

伝達関数の分母多項式が以下で与えられるとき, フルビッツの安定判別法を用いて，システムが安定か否か判別せよ。

(1) $s^3 + 2s^2 + s + 3$

(2) $s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 1$

【解答】

(1) 係数はすべて正となっているので, 条件 H の (ii) を満たしていることが分かる. 次に, 行列 H を作成する.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

小行列式は

$$H_1 = 2 \tag{2}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3, \tag{3}$$

となる. これより $H_1 \sim H_4$ がすべて正でないことが分かる. よって,

$H_2 < 0$，$H_3 < 0$ のためシステムは不安定。

別解 (簡単化したフルビッツの安定班別法)

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \tag{4}$$

$H_2 < 0$ のためシステムは不安定。

ダメな解答例 (H_1，H_2，H_3 だけ書いて理由が書いていない)

$$H_1 = 2 \tag{5}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3, \tag{6}$$

不安定

(2) 係数はすべて正となっているので, 条件 H の (ii) を満たしていることが分かる. 次に, 行列 H を作成する.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

小行列式は

$$H_1 = 2, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \tag{8}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 17 \tag{9}$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 17 \tag{10}$$

となる．これより $H_1 \sim H_4$ がすべて正であることが分かる。. よって,

係数がすべて正で，かつ，$H_1 \sim H_4$ が正なので，安定。

別解 (簡単化したフルビッツの安定班別法)

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 17 \tag{11}$$

係数がすべて正で，かつ，H_3 が正なので，安定。

ダメな解答例 ($H_1 \sim H_4$ だけ書いて理由が書いていない)

$$H_1 = 2, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \tag{12}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 17 \tag{13}$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 17 \tag{14}$$

安定

[問題 2]　3 章演習問題【11】

伝達関数の分母多項式が以下で与えられるとき, システムが安定となる K の範囲をフルビッツの安定判別法とラウスの安定判別法を用いて求めよ.

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

【解答】

(1) フルビッツの安定判別法

係数がすべて正なので

$$K > 0 \tag{15}$$

次に, 行列 H を作成する.

$$H = \begin{pmatrix} 3 & K & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & K \end{pmatrix}$$

小行列は

$$H_1 = 3, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 3 & K \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - K,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 3 & K & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & K \end{vmatrix} = 6K - K^2$$

となる. これより $H_1 \sim H_5$ がすべて正になるには

$$6 - K > 0,\ 6K - K^2 > 0 \tag{16}$$

式 (15), (16) から, システムが安定となるための K の範囲は次のようになる。

$$\underline{0 < K < 6} \tag{17}$$

別解 (簡単化したフルビッツの安定判別法)

係数がすべて正なので

$$K > 0 \tag{18}$$

小行列より

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & K \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - K > 0 \tag{19}$$

式 (18), (19) から, システムが安定となるための K の範囲は次のようになる。

$$\underline{0 < K < 6} \tag{20}$$

ダメな解答例 (係数が正が明示されていない)

小行列は

$$H_1 = 3, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 3 & K \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - K,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 3 & K & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & K \end{vmatrix} = 6K - K^2$$

となる. これより $H_1 \sim H_5$ がすべて正になるには

$$6 - K > 0,\ 6K - K^2 > 0 \tag{21}$$

(21) から, システムが安定となるための K の範囲は次のようになる。

$$\underline{0 < K < 6} \tag{22}$$

(2) ラウスの安定判別法

係数がすべて正を満たすために

$$K > 0 \tag{23}$$

である必要がある。次に, ラウス表を作成する.

s^3	1	2	0
s^2	3	K	0
s	$\frac{6-K}{3}$	0	
s^0	$K = \frac{(6-k)/3 \times K - 3 \times 0}{(6-k)/3}$	0	

ラウス数列をすべて正とするため次式を満たす必要がある.

$$\frac{6-K}{3} > 0 \quad K > 0 \tag{24}$$

式 (23), (26) から, システムが安定となるための K の範囲は

$$\underline{0 < K < 6} \tag{25}$$

ダメな解答例 (係数が正が明示されていない)

s^3	1	2	0
s^2	3	K	0
s	$\frac{6-K}{3}$	0	
s^0	$K = \frac{(6-k)/3 \times K - 3 \times 0}{(6-k)/3}$	0	

ラウス数列をすべて正とするため次式を満たす必要がある.

$$\frac{6-K}{3} > 0 \quad K > 0 \tag{26}$$

式 (26) から, システムが安定となるための K の範囲は

$$\underline{0 < K < 6} \tag{27}$$

[問題 3]　3 章演習問題【11】

伝達関数の分母多項式が以下で与えられるとき, システムが安定となる K の範囲をフルビッツの安定判別法とラウスの安定判別法を用いて求めよ.

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + (K-2)s + (4-K) \tag{28}$$

【解答】

(1) フルビッツの安定判別法

係数が正より

$$K-2>0,\ 4-K>0 \tag{29}$$

次に，行列 H を作成する。

$$H = \begin{pmatrix} 1 & K-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4-K & 0 \\ 0 & 1 & K-2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4-K \end{pmatrix}$$

小行列

$$\begin{aligned} H_1 &= 1>0 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} 1 & K-2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-(K-2) = 4-K > 0 \\ H_3 &= \begin{vmatrix} 1 & K-2 & 0 \\ 1 & 2 & 4-K \\ 0 & 1 & K-2 \end{vmatrix} \\ &= 2(K-2) - ((4-K)+(K-2)^2) \\ &= -K^2+7K-12>0 \\ H_4 &= (-1)^{4+4}(4-K)H_3 > 0 \end{aligned}$$

から $H_1 \sim H_4$ がすべて正になるには

$$4-K>0,\quad -K^2+7K-12>0 \tag{30}$$

式 (29)，(30) からシステムが安定となるための K の範囲は

$$\begin{aligned} K^2-7K+12 &< 0 \\ (K-4)(K-3) &< 0 \\ \Rightarrow 3<K<4 & \end{aligned}$$

を用いると,

$$K-2>0,\quad 4-K>0,\quad 3<K<4$$

を満たす範囲となる。よって,

$$\underline{3<K<4}$$

となる。

別解 (簡単化したフルビッツの安定判別法)

係数が正より

$$K-2>0,\ 4-K>0 \tag{31}$$

小行列

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{vmatrix} 1 & K-2 & 0 \\ 1 & 2 & 4-K \\ 0 & 1 & K-2 \end{vmatrix} \\ &= 2(K-2) - ((4-K)+(K-2)^2) \\ &= -K^2+7K-12>0 \end{aligned} \tag{32}$$

式 (31)，(33) からシステムが安定となるための K の範囲は

$$\begin{aligned} K^2-7K+12 &< 0 \\ (K-4)(K-3) &< 0 \\ \Rightarrow 3<K<4 & \end{aligned}$$

を用いると,

$$K-2>0,\quad 4-K>0,\quad 3<K<4$$

を満たす範囲となる。よって,

$$\underline{3<K<4}$$

となる。

ダメな解答例 (係数が正が入っていない)

(途中計算は省略する)
小行列

$$\begin{aligned} &H_1 = 1>0 \\ &H_2 = 4-K>0 \\ &H_3 = -K^2+7K-12>0 \\ &H_4 = (-1)^{4+4}(4-K)H_3>0 \end{aligned}$$

から $H_1 \sim H_4$ がすべて正になるには

$$4-K>0,\quad -K^2+7K-12>0 \tag{33}$$

(33) からシステムが安定となるための K の範囲は

$$\underline{3<K<4}$$

となる。

(2) ラウスの安定判別法

係数が正となるためには

$$K-2>0, 4-K>0 \tag{34}$$

ある。次にラウス表を作成する.

ラウス表

s^4	1	2	$4-K$
s^3	1	$K-2$	0
s^2	$4-K=\frac{1\times2-1\times(K-2)}{1}$	$4-K=\frac{1\times(4-K)-1\times0}{1}$	0
s^1	$K-3=\frac{(4-K)\times(K-2)-1\times(4-K)}{4-K}$	0	0
s^0	$4-K=\frac{(K-3)\times(4-K)-(4-K)\times0}{K-3}$	0	0

ラウス数列がすべて正であるためには

$$4-K>0, \quad K-3>0 \tag{35}$$

を満たす必要がある。式 (34)，(35) から, システムが安定となるための K の範囲は

$$K-2>0, \quad 4-K>0, \quad K-3>0 \tag{36}$$

を満たす範囲となる。よって,

$\underline{3<K<4}$

となる。

ダメな解答例 (係数が正が入っていない)

ラウス表

s^4	1	2	$4-K$
s^3	1	$K-2$	0
s^2	$4-K=\frac{1\times2-1\times(K-2)}{1}$	$4-K=\frac{1\times(4-K)-1\times0}{1}$	0
s^1	$K-3=\frac{(4-K)\times(K-2)-1\times(4-K)}{4-K}$	0	0
s^0	$4-K=\frac{(K-3)\times(4-K)-(4-K)\times0}{K-3}$	0	0

ラウス数列がすべて正であるためには

$$4-K>0, \quad K-3>0 \tag{37}$$

を満たす必要がある。システムが安定となるための K の範囲は

$\underline{3<K<4}$

となる。