第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

キーワード：　安定性, フルビッツの安定判別法

学習目標：システムが安定か否かを伝達関数の係数から簡単に判別するフルビッツの安定判別法を習得する。

フルビッツの安定判別法

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$(n \times n)$$

（左上の）$k \times k$ の主座小行列式 $H_k \ (k = 1 \sim n)$

$$H_1 = a_{n-1} \qquad (|a_{n-1}|)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

安定性の必要十分条件

（条件H）(i) $H_1 \sim H_n$ がすべて正
(ii) 条件Bが成立

（条件B） すべての係数 $a_n, \ a_{n-1}, \ \cdots, a_0$ が正

[例題 3.2]

$$D(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$1>0 \quad a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0$

（条件B） すべての係数が正

$$H = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = a_2 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_0^2$$

$$= a_0 \left(a_2 a_1 - a_0 \right)$$

$$= a_0 H_2 > 0$$

$$\underline{a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0,\ a_2 a_1 - a_0 > 0}$$

安定

[例題 3.3]

$$D(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 3$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 1 - 9 - 4$$

$$= 6$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{4+4} \times 4 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{= H_3 = 6} + (-1)^{3+4} \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}}_{= 36 + 1 - (4 + 18) = 15}$$

$$= 24 - 15 = 9$$

$$H_5 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{5+5} \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}}_{= H_4 = 9} = 9$$

よって

$$\underline{H_1 = 1,\ H_2 = 3,\ H_3 = 6,\ H_4 = 9,\ H_5 = 9}$$

すべて正

よって 安定

フルビッツの安定判別法の簡略化（リエナール，シパール）

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$

（条件 B）のもとで

$n = 2k$（偶数）のとき $H_3,\ H_5, \cdots,\ H_{2k-1}$ がすべて正

$n = 2k+1$（奇数）のとき $H_2,\ H_4, \cdots,\ H_{2k}$ がすべて正

［ 例題 3.2 ］ $D(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

（条件 B）と H_2 だけでよい（ H_3 は不要）

[例]

$$D(s) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$1>0,\ a_3 > 0,\ a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0$$

（条件B） すべての係数が正

$$H = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_0 a_3^2$$

$$= a_1 \left(a_2 a_3 - a_1\right) - a_0 a_3^2 > 0$$

よって

$$a_3 > 0,\ a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0$$

$$a_1 \left(a_2 a_3 - a_1\right) - a_0 a_3^2 > 0$$

第 3 章：ダイナミカルシステムの過渡応答と安定性

3.5 ダイナミカルシステムの安定性

キーワード：　安定性，フルビッツの安定判別法

学習目標：システムが安定か否かを伝達関数の係数から簡単に判別するフルビッツの安定判別法を習得する。