第 4 章：フィードバック制御系の特性

4.1 感度特性

キーワード： 感度，感度関数

学習目標：フィードバック制御系における感度関数について理解する。

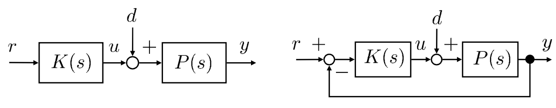
4 フィードバック制御系の特性
4.1 感度特性

パラメータの変化に対する感度

フィードバック vs フィードフォワード

外乱なし ($d = 0$)

制御対象（1 次系） $P(s) = \dfrac{A}{\tau s + 1}$　　コントローラ（ゲイン） $K(s) = K$

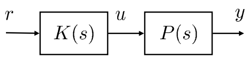


(a) フィードフォワード制御系　(b) フィードバック制御系

図 4.1 フィードフォワード制御系とフィードバック制御系

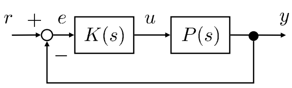
$r \to y$ への伝達関数

フィードフォワード



$$y(s) = P(s)K(s)r(s) = \frac{A}{\tau s + 1} \cdot K \cdot r(s) = \frac{AK}{\tau s + 1} r(s)$$

フィードバック



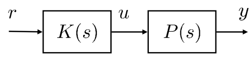
$$\begin{cases} y(s) = P(s)K(s)e(s) \\ e(s) = r(s) - y(s) \end{cases}$$

$$(1 + P(s)K(s))\, y(s) = P(s)K(s)r(s)$$

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} r(s) = \frac{AK}{\tau s + 1 + AK} r(s)$$

（閉ループ伝達関数）

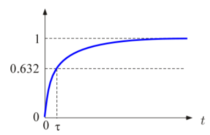
フィードフォワード



ゲイン $K = \dfrac{1}{A}$ とすると

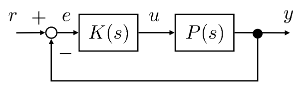
$$y(s) = \frac{AK}{\tau s + 1} r(s) = \frac{1}{\tau s + 1} r(s)$$

ステップ応答



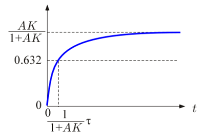
$y(t) \approx r(t)$　$(t \to \infty)$

フィードバック



$$y(s) = \frac{AK}{\tau s + 1 + AK} r(s)$$

ステップ応答

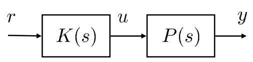


ゲイン $K \to \infty$ とすると

$$\frac{AK}{\tau s + 1 + AK} \approx \frac{AK}{AK} = 1$$

（A や τ に関係ない）

フィードフォワード



ゲイン $K = \dfrac{1}{A}$ とすると

$$y(s) = \frac{AK}{\tau s + 1} r(s) = \frac{1}{\tau s + 1} r(s)$$

$y(t) \approx r(t)$　$(t \to \infty)$

$\tilde{A} = 1.4A$（特性変動）

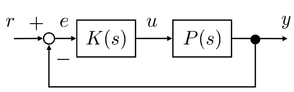
40 % 変化

$$\tilde{y}(s) = \frac{\tilde{A}K}{\tau s + 1} r(s) = \frac{1.4}{\tau s + 1} r(s)$$

$\tilde{y}(t) \approx 1.4 r(t)$

$(1.4 y(t))$

フィードバック



$$y(s) = \frac{AK}{\tau s + 1 + AK} r(s)$$

ゲイン $K \to \infty$ とすると

$$\frac{AK}{\tau s + 1 + AK} \approx \frac{AK}{AK} = 1$$

（A や τ に関係ない）

$\therefore$　$y(t) \approx r(t)$

特性変動による影響の抑制

[例 4.1]

$P(s) = \dfrac{A}{\tau s + 1}$, $K(s) = K$

$\tau = 1$, $A = 5$

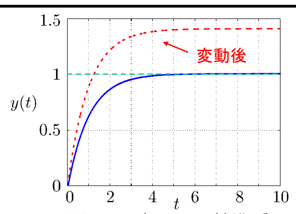
とすると $P(s) = \dfrac{5}{s + 1}$

特性変化　$A \to \tilde{A} = 7$

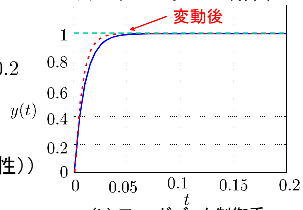
フィードフォワード: $K = \dfrac{1}{A} = 0.2$

フィードバック: $K = 20$

（$t = 0.05$で収束，安定化（速応性））



(a) フィードフォワード制御系



(b) フィードバック制御系

感度

制御対象：$P(s) \to \tilde{P}(s)$ と変化

$r \to y$ への閉ループ伝達関数　$T(s) = \dfrac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \to \tilde{T}(s)$ へと変化

相対的な変動率

$$\Delta_P(s) = \frac{P(s)-\tilde{P}(s)}{\tilde{P}(s)} \qquad \Delta_T(s) = \frac{T(s)-\tilde{T}(s)}{\tilde{T}(s)}$$

$$\Delta_T(s) = \frac{\dfrac{PK}{1+PK} - \dfrac{\tilde{P}K}{1+\tilde{P}K}}{\dfrac{\tilde{P}K}{1+\tilde{P}K}} = \frac{PK(1+\tilde{P}K) - \tilde{P}K(1+PK)}{\tilde{P}K(1+PK)}$$

$$\overset{\Delta_P(s)}{=} \frac{\boxed{(P-\tilde{P})}\cancel{K}}{\boxed{\tilde{P}}\cancel{K}(1+PK)} = \frac{1}{1+P(s)K(s)}\Delta_P(s)$$

7

$$\Delta_T(s) = \frac{1}{1+P(s)K(s)}\Delta_P(s)$$

閉ループ系の変動が $\dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$ 倍になって

閉ループ系に影響する

$K(s)$ のゲイン大 $\to$ 低感度

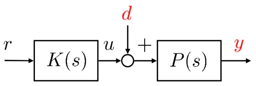
感度関数　$S(s) = \dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$

8

外乱に対する感度（目標値 $r=0$）

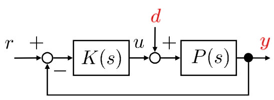
フィードフォワード

$$y(s) = P(s)d(s)$$



フィードバック

$$y(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}d(s)$$



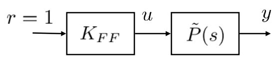
$S(s) = \dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$　だけ低減

外乱の影響の抑制

9

[例 4.1]　特性変化

$$P(s) = \frac{5}{s+1} \;\Rightarrow\; \tilde{P}(s) = \frac{7}{s+1}$$

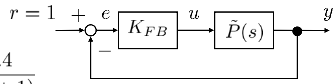


$$K_{FF} = \frac{1}{A} = 0.2$$

フィードフォワード

$$y = \frac{7}{s+1}K_{FF}r$$

$$= \frac{7}{s+1} \times 0.2 \times \frac{1}{s} = \frac{1.4}{s(s+1)}$$



$$K_{FB} = 20$$

定常値

$$\lim_{t\to\infty} y = \lim_{s\to 0} sy = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1.4}{s(s+1)}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{1.4}{s+1} = 1.4$$

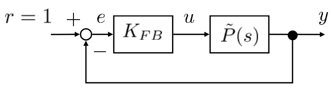
偏差

$$e = r - y = 1 - 1.4 = -0.4$$

10

フィードバック

$$y = \frac{7}{s+1}K_{FB}(r-y)$$



$$K_{FB} = 20$$

から

$$\left(1 + \frac{7}{s+1}K_{FB}\right)y = \frac{7}{s+1}K_{FB}r$$

$$(s+1+7K_{FB})y = 7K_{FB}r$$

$$y = \frac{7K_{FB}}{s+1+7K_{FB}}r$$

よって

$$y = \frac{140}{s+1+140}\frac{1}{s} = \frac{140}{s(s+1+140)}$$

定常値

$$\lim_{t\to\infty} y = \lim_{s\to 0} sy = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{140}{s(s+1+140)}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{140}{s+1+140} = \frac{140}{141}$$

偏差

$$e = r - y = 1 - \frac{140}{141} = \frac{1}{141}$$

11

第 4 章：フィードバック制御系の特性

4.1　感度特性

キーワード：　感度，感度関数

学習目標：フィードバック制御系における感度関数について理解する。

12