

2021 年度 制御工学 I 第 12 回レポート (模範解答)

4 年 E 科 番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

[問題 1] 4 章演習問題【2】

図 1 のフィードバック系において

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}, \quad K(s) = \frac{2}{s}$$

とする。このとき、まず  $d(t) = 0$  として、目標値  $r(t)$  に対する定常位置偏差と定常速度偏差を計算せよ。つぎに  $r(t) = 0$  として、ステップ外乱  $d(t) = 1$  およびランプ外乱  $d(t) = t$  を加えたときの  $y(t)$  の定常値を計算せよ。

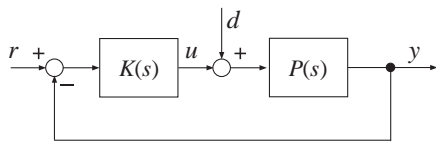


図 1: フィードバック系

【解答】

$d(t) = 0$  として目標値  $r(t)$  に対する定常位置偏差を求める。偏差  $e(s)$  を

$$e(s) = r(s) - y(s) \tag{1-1}$$

とし、偏差  $e(s)$  と  $y(s)$  の関係

$$y(s) = P(s)K(s)e(s) \tag{1-2}$$

から、目標値  $r(s)$  から偏差  $e(s)$  までの伝達関数  $G_{er}(s)$  は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - P(s)K(s)e(s) \\ (1 + P(s)K(s))e(s) &= r(s) \\ \frac{e(s)}{r(s)} &= \frac{1}{1 + P(s)K(s)} \end{aligned} \tag{1-3}$$

よって、伝達関数  $G_{er}(s)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} G_{er}(s) &= \frac{1}{1 + P(s)K(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(s+2)(s+1)} \cdot \frac{2}{s}} \\ &= \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2} \end{aligned} \tag{1-4}$$

定常位置偏差  $e_{s1}$  は、最終値の定理を用いることにより次式となる。

$$\begin{aligned} e_{s1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} G_{er}(s)r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{er}(s)r(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \underline{0} \end{aligned} \tag{1-5}$$

また、定常速度偏差  $e_{s2}$  も最終値の定理を用いることにより次式となる。

$$\begin{aligned} e_{s2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} G_{er}(s)r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{er}(s)r(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2} \\ &= \underline{1} \end{aligned} \tag{1-6}$$

次に、 $r(t) = 0$  として、ステップ外乱  $d(t) = 1$  およびランプ外乱  $d(t) = t$  を加えたときの  $y(t)$  の定常値を求める。ステップ外乱  $d(t) = 1$  から出力  $y(t)$  までの伝達関数  $G_{yd}$  は

$$\begin{cases} u(s) = -K(s)y(s) \\ y(s) = P(s)(d(s) + u(s)) \end{cases} \tag{1-7}$$

の関係から以下のように求まる。

$$\begin{aligned} y(s) &= P(s)d(s) - P(s)K(s)y(s) \\ (1 + P(s)K(s))y(s) &= P(s)d(s) \\ y(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} \cdot d(s) \end{aligned} \tag{1-8}$$

よって、外乱  $d(t)$  から出力  $y(t)$  までの伝達関数  $G_{yd}(s)$  は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} \\ &= \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2} \end{aligned} \tag{1-9}$$

よって、ステップ外乱  $d(t) = 1$  に対する定常値は、次式となる。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} G_{yd}(s)d(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{yd}(s)d(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \underline{0} \end{aligned} \tag{1-10}$$

となる。また、ランプ外乱  $d(t) = t$  に対する定常値は、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} G_{yd}(s)d(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{yd}(s)d(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2} \\ &= \underline{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1-11}$$

となる。

[問題 2] 4 章演習問題【3】

図 2 のフィードバック系において

$$P(s) = \frac{2}{(s+2)^2}, \quad K(s) = 2$$

とする。このとき、つぎの問いに答えよ。

- (1) この系では  $y(s) = G_{yr}(s)r(s) + G_{yd}(s)d(s)$  という関係が成り立つ。伝達関数  $G_{yr}(s)$  と  $G_{yd}(s)$  を求めよ。
- (2) ステップ状の目標値と外乱  $r(t) = 2, d(t) = 4$  が同時に加わったとき、 $y(t)$  の定常値を計算せよ。

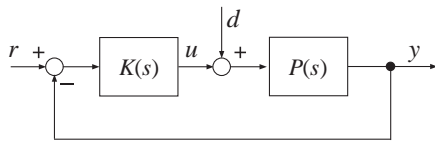


図 2: フィードバック系

【解答】

- (1) 図 1 から次の式が成立する。

$$\begin{aligned} y(s) &= ((r(s) - y(s))K(s) + d(s))P(s) \\ \Rightarrow (1 + P(s)K(s))y(s) &= P(s)K(s)r(s) + P(s)d(s) \\ \Rightarrow y(s) &= \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}r(s) + \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}d(s) \end{aligned} \tag{2-1}$$

(2-1) 式に  $P(s) = \frac{2}{(s+2)^2}, K(s) = 2$  を代入することにより、

$$\begin{aligned} \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} &= \frac{\frac{2}{(s+2)^2} \cdot 2}{1 + \frac{2}{(s+2)^2} \cdot 2} = \frac{4}{(s+2)^2 + 4} \\ &= \frac{4}{s^2 + 4s + 8} \end{aligned} \tag{2-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} &= \frac{\frac{2}{(s+2)^2}}{1 + \frac{2}{(s+2)^2} \cdot 2} = \frac{2}{(s+2)^2 + 4} \\ &= \frac{2}{s^2 + 4s + 8} \end{aligned} \tag{2-3}$$

(2-1) 式は、

$$y(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 8}r(s) + \frac{2}{s^2 + 4s + 8}d(s) \tag{2-4}$$

となる。よって、 $y(s) = G_{yr}(s)r(s) + G_{yd}(s)d(s)$  と比較して、 $G_{yr}(s), G_{yd}(s)$  は

$$G_{yr}(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 8}, G_{yd}(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 8} \tag{2-5}$$

となる。

- (2)  $y(t)$  の定常値  $y_s$  は次のように計算することができる。

$$y_s = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) \tag{2-6}$$

目標値  $r(t) = 2$ 、外乱  $d(t) = 4$  をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{2}{s}, \quad \mathcal{L}[d(t)] = \frac{4}{s} \tag{2-7}$$

となる。よって、目標値  $r(s) = \frac{2}{s}$ 、外乱  $d(s) = \frac{4}{s}$  が同時に加わったとき定常値は、

$$\begin{aligned} y_s &= \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s(G_{yr}(s)r(s) + G_{yd}(s)d(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{4}{s^2 + 4s + 8} \cdot \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2 + 4s + 8} \cdot \frac{4}{s} \right) \\ &= \frac{4}{8} \cdot 2 + \frac{2}{8} \cdot 4 \\ &= \underline{2} \end{aligned} \tag{2-8}$$

となる。