

第4章：フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

キーワード：開ループ伝達関数（一巡伝達関数），定常偏差，偏差定数，I型の制御系

学習目標：定常偏差や偏差定数について理解する。
フィードバック制御系の型について理解する。

1

4 フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

目標値に対する定常偏差（外乱 $d=0$ ）

[例 4.2]

制御対象: $P(s) = \frac{1}{s+1}$

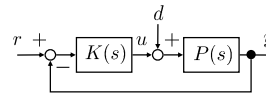


図4.1 (b) フィードバック制御系

コントローラ: $K(s) = K$

$r \rightarrow y$ への閉ループ系の伝達関数

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\frac{K}{s+1}}{1 + \frac{K}{s+1}} = \frac{K}{s+K+1}$$

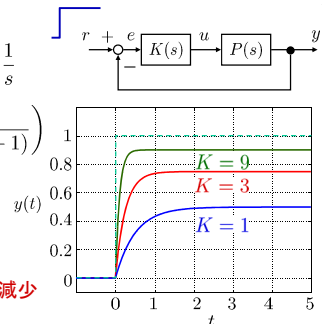
2

$$y(s) = T(s)r(s) \quad \left[T(s) = \frac{K}{s+K+1}, r(s) = \frac{1}{s} \text{ (ステップ応答)} \right]$$

$$y(s) = \frac{K}{1+K} \cdot \frac{K+1}{s+(K+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{K}{1+K} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+(K+1)} \right)$$

$$y(t) = \frac{K}{1+K} \left(1 - e^{-(K+1)t} \right)$$



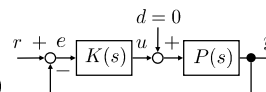
ゲイン:大 → (定常)偏差:減少

図4.3 ステップ応答例

3

偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$

一巡伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$
(開ループ伝達関数)



$$e(s) = r(s) - L(s)e(s)$$

$e(s) = r(s) - y(s)$

→ $(1 + L(s))e(s) = r(s)$

$y(s) = L(s)e(s)$

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

(感度関数)

定常偏差

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

最終値定理 (p. 190 付録(L7))

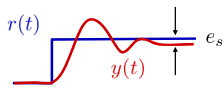
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

4

[A] ステップ入力

$$r(t) = 1 \quad \left(r(s) = \frac{1}{s} \right)$$

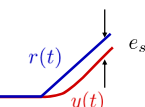


$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} \quad \text{定常位置偏差}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = L(0) \quad \text{位置偏差定数}$$

[B] ランプ入力

$$r(t) = t \quad \left(r(s) = \frac{1}{s^2} \right)$$



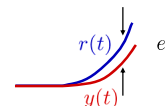
$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s) \quad \text{速度偏差定数} \quad \text{定常速度偏差}$$

5

[C] 一定加速度入力

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad \left(r(s) = \frac{1}{s^3} \right)$$



$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} \quad \text{定常加速度偏差}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s) \quad \text{加速度偏差定数}$$

偏差定数

$$K_p (= L(0)), K_v, K_a : \text{大} \rightarrow \text{定常偏差:小}$$

6

(一般に)一巡伝達関数 $L(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^l (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)}$

$l=0$ のとき:
 $L(s)$ は積分器 $\frac{1}{s}$ を持たない

$r(t) = 1 \Rightarrow e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$

$r(t) = t \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{0} = \infty$

$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{0} = \infty$

7

$l=1$ のとき:
 $L(s)$ は積分器 $\frac{1}{s}$ を1個含む

$r(t) = 1 \Rightarrow e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$

$r(t) = t \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_v}$

$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{0} = \infty$

8

$l=2$ のとき:
 $L(s)$ は積分器 $\frac{1}{s}$ を2個含む

$r(t) = 1 \Rightarrow e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$

$r(t) = t \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$

$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{K_a}$

9

定常偏差をゼロにするためには
 l 型(タイプ l)の制御系: $L(s)$ が l 個の積分器 $\left(\frac{1}{s}\right)^l$ をもつ

$r(t) = 1$ のとき $l \geq 1$

$r(t) = t$ のとき $l \geq 2$

$r(t) = \frac{1}{2}t^2$ のとき $l \geq 3$

\Rightarrow (係数の値に関係なく) 常に、定常偏差 = 0

制御系の型	$r(t) = 1$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{t^2}{2}$
$l=0$ 0型	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
$l=1$ 1型	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
$l=2$ 2型	0	0	$\frac{1}{K_a}$

10

[例 4.3]

$P(s) = \frac{1}{s}, K(s) = \frac{K_0}{s+1} (K_0 > 0)$

$L(s) = P(s)K(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$

位置偏差定数
 $K_p = L(0) = \infty$

定常位置偏差
 $e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + L(0)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$

(K_0 の値に関係なく)

図4.4 (a) ステップ応答

11

$L(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$

速度偏差定数
 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_0}{s+1} = K_0$

定常速度偏差
 $e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_0}$

加速度偏差定数
 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{K_0}{s(s+1)} = 0$

定常加速度偏差
 $e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \infty$

図4.4 (b) ランプ入力応答

12

[例 4.3] (再考)

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad K(s) = \frac{K_0}{s+1} \quad (K_0 > 0)$$

$$r(s) = \frac{1}{s}$$

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{K_0}{s(s+1)} \quad \text{1 型}$$

K_0 の値に関係なく定常位置偏差 = 0

$$L(0) = \infty \quad \left(\Leftrightarrow S(0) = \frac{1}{1+L(0)} = 0 \right)$$

目標値の周波数成分 ($\omega = 0$) に対して, ループゲインが無限大

13

外乱に対する定常偏差 (目標値 $r = 0$)

$$y(s) = P(s) \{d(s) + K(s)(r(s) - y(s))\}$$

$$(1 + P(s)K(s))y(s) = P(s)d(s)$$

$$y(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}d(s)$$

ステップ外乱 $d(s) = \frac{1}{s}$

定常偏差 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \frac{P(0)}{1 + P(0)K(0)}$

$K(0) = \infty$ または $P(0) = 0$ ならば, 定常偏差 = 0

(実質的には)コントローラが積分器をもつことが重要

外乱の周波数成分 ($\omega = 0$) に対して, コントローラのゲインが無限大

14

[例 4.4] 目標値応答と外乱発生

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad d(s) = \frac{1}{s}$$

ステップ外乱が同時に加わると定常偏差

制御器に積分器

図4.5 ステップ外乱が存在するときの目標値応答

15

第 4 章 : フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

キーワード : 開ループ伝達関数 (一巡伝達関数), 定常偏差, 偏差定数, l 型の制御系

学習目標 : 定常偏差や偏差定数について理解する。
フィードバック制御系の型について理解する。

16