第４章：フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

キーワード： 開ループ伝達関数（一巡伝達関数），
定常偏差，偏差定数，l 型の制御系

学習目標： 定常偏差や偏差定数について理解する。
フィードバック制御系の型について理解する。

4 フィードバック制御系の特性
4.2 定常特性

目標値に対する定常偏差（外乱$d=0$）

[例 4.2]

制御対象： $P(s)=\dfrac{1}{s+1}$

コントローラ： $K(s)=K$

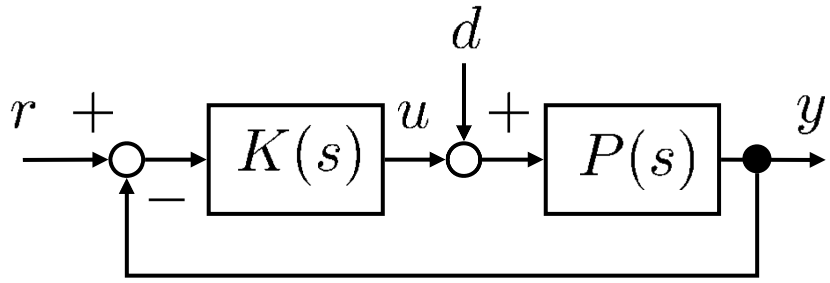
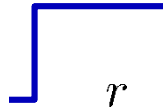


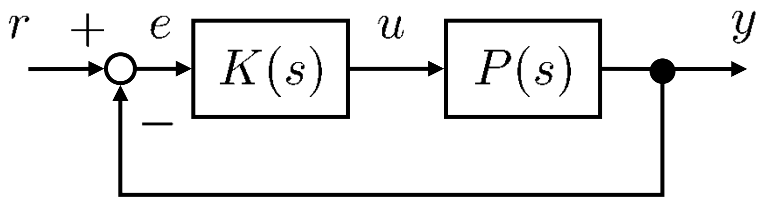
図4.1 （b）フィードバック制御系

$r \to y$ への閉ループ系の伝達関数

$$T(s)=\frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}=\frac{\dfrac{K}{s+1}}{1+\dfrac{K}{s+1}}=\frac{K}{s+K+1}$$

$$y(s) = T(s)r(s) \qquad \left[T(s) = \frac{K}{s+K+1},\ r(s) = \frac{1}{s}\ \text{(ステップ応答)} \right]$$





$$y(s) = \frac{K}{1+K} \cdot \frac{K+1}{s+(K+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{K}{1+K} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+(K+1)} \right)$$

$$y(t) = \frac{K}{1+K} \left(1 - e^{-(K+1)t} \right)$$

ゲイン:大 ➡ (定常)偏差:減少

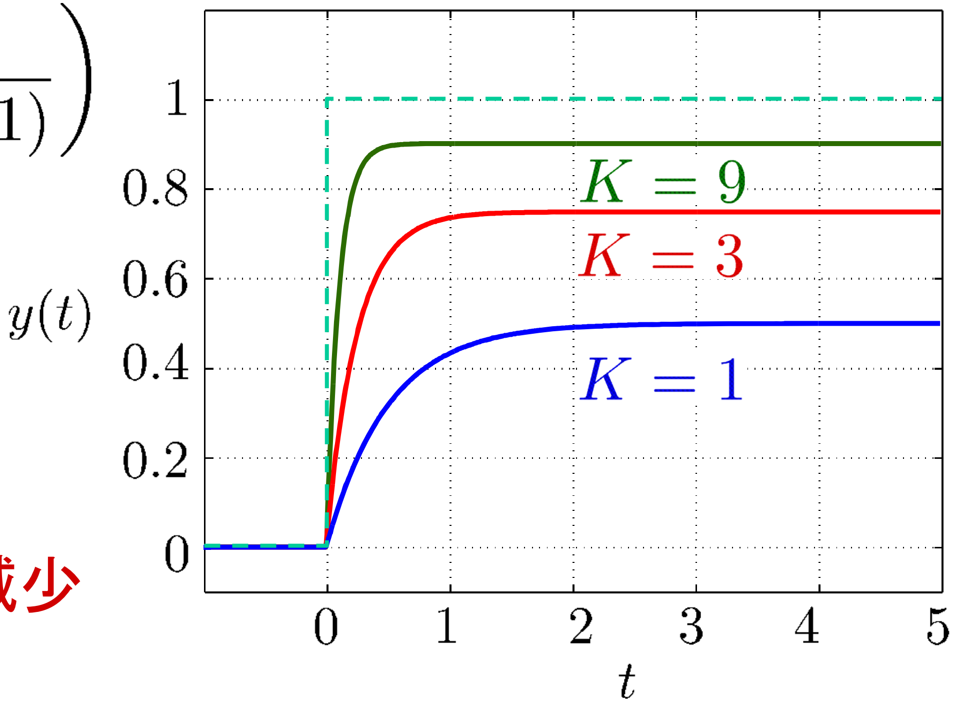
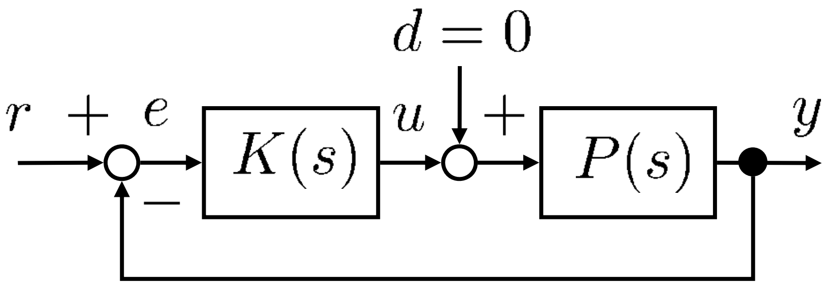


図4.3 ステップ応答例

偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$



一巡伝達関数　$L(s) = P(s)K(s)$
（開ループ伝達関数）

$$e(s) = r(s) - L(s)e(s)$$

- $e(s) = r(s) - y(s)$
- $y(s) = L(s)e(s)$

$$(1 + L(s))\,e(s) = r(s)$$

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

（感度関数）

定常偏差

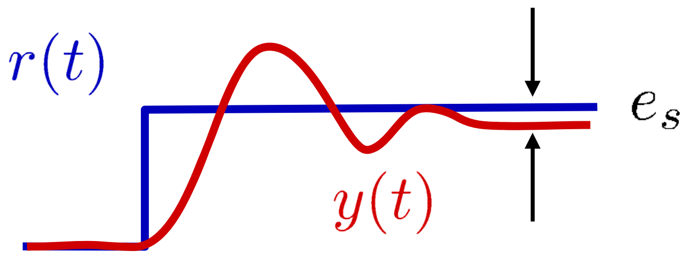
$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t\to\infty} e(t) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot e(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+L(s)} r(s) \end{aligned}$$

最終値定理(p. 190 付録(L7))

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

[A] ステップ入力

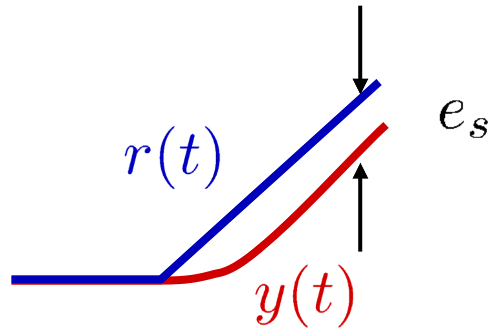


$$r(t) = 1 \qquad \left(r(s) = \frac{1}{s} \right)$$

$$e_s = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} L(s)}$$ 定常位置偏差

$$K_p = \lim_{s\to 0} L(s) = L(0)$$ 位置偏差定数

[B] ランプ入力



$$r(t) = t \qquad \left(r(s) = \frac{1}{s^2} \right)$$

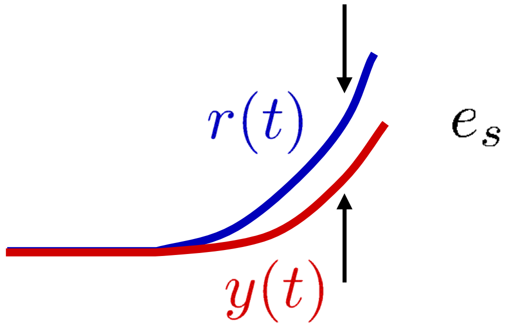
$$e_s = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + sL(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sL(s)}$$

定常速度偏差

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s)$$ 速度偏差定数

[C] 一定加速度入力

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \qquad \left(r(s) = \frac{1}{s^3} \right)$$



$$e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)}$$ 定常加速度偏差

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 L(s)$$ 加速度偏差定数

偏差定数

$K_p (= L(0)),\ K_v,\ K_a$:大 ➡ 定常偏差:小

(一般に)一巡伝達関数 $L(s) = \dfrac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{\underline{s^l}\,(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)}$

<u>$l = 0$ のとき:</u>

$L(s)$ は積分器 $\dfrac{1}{s}$ を持たない

$$r(t) = 1 \;\Rightarrow\; e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} L(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$r(t) = t \;\Rightarrow\; e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$l = 1$ のとき:

$L(s)$ は積分器 $\dfrac{1}{s}$ を 1 個含む

$$r(t) = 1 \;\Rightarrow\; e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} L(s)} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$r(t) = t \;\Rightarrow\; e_s = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_v}$$

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \;\Rightarrow\; e_s = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$l=2$ のとき:

$L(s)$ は積分器 $\dfrac{1}{s}$ を 2 個含む

$$r(t)=1 \quad \Rightarrow \quad e_s = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} L(s)} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

$$r(t)=t \quad \Rightarrow \quad e_s = \lim_{s\to 0}\frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$r(t)=\frac{1}{2}t^2 \Rightarrow e_s = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2L(s)} = \frac{1}{K_a}$$

定常偏差をゼロにするためには

l 型(タイプ l)の制御系: $L(s)$ が l 個の積分器 $\left(\dfrac{1}{s}\right)^l$ をもつ

$r(t)=1$ のとき $l \geq 1$

$r(t)=t$ のとき $l \geq 2$

$r(t)=\dfrac{t^2}{2}$ のとき $l \geq 3$

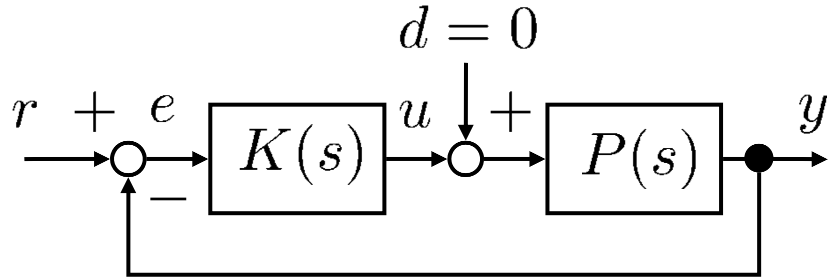
$\Rightarrow$ (係数の値に関係なく)
常に, 定常偏差 $=0$

表4.1 制御系の型と定常偏差

	制御系の型	$r(t)=1$	$r(t)=t$	$r(t)=\dfrac{t^2}{2}$
$l=0$	0 型	$\dfrac{1}{1+K_p}$	∞	∞
$l=1$	1 型	0	$\dfrac{1}{K_v}$	∞
$l=2$	2 型	0	0	$\dfrac{1}{K_a}$

[例 4.3]

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad K(s) = \frac{K_0}{s+1} \quad (K_0 > 0)$$



$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$$

位置偏差定数

$$K_p = L(0) = \infty$$

定常位置偏差

$$e_s = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} L(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + L(0)} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

(K_0 の値に関係なく)

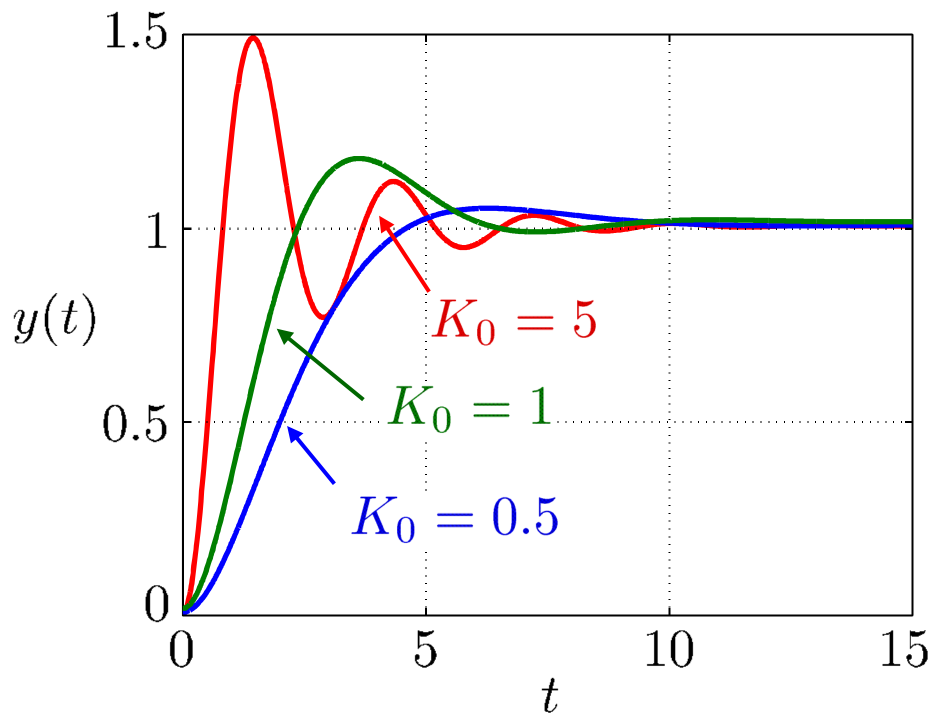
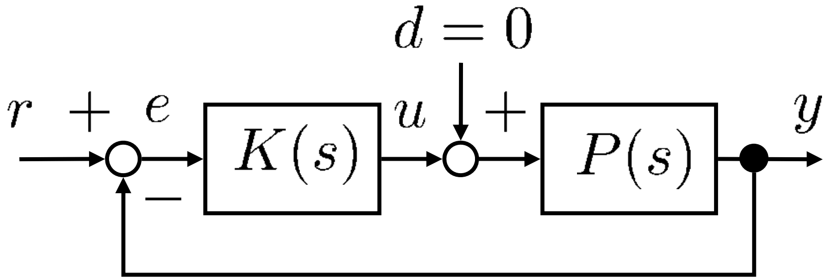


図4.4 (a) ステップ応答

$$L(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$$



速度偏差定数

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \cdot L(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{K_0}{\cancel{s}(s+1)} = K_0$$

定常速度偏差

$$e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_0}$$

加速度偏差定数

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot L(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s^2 \cdot \frac{K_0}{s(s+1)} = 0$$

定常加速度偏差

$$e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \infty$$

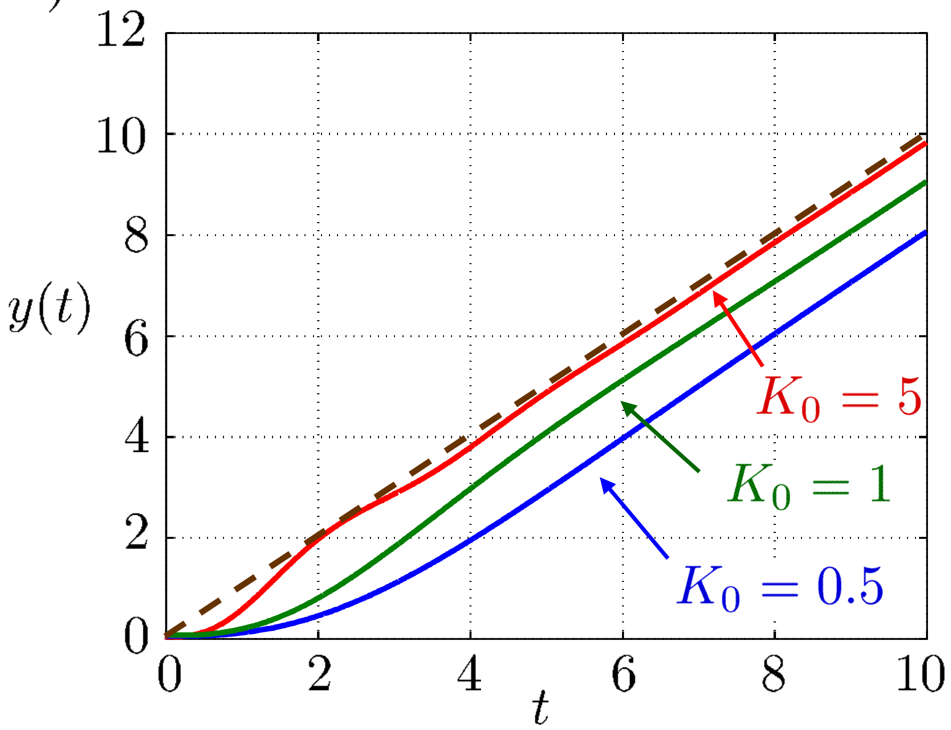
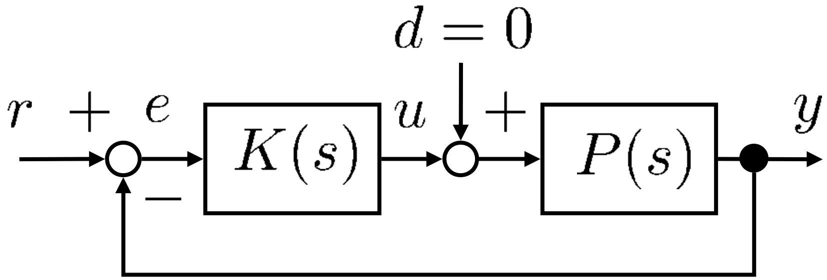


図4.4（b）ランプ入力応答

[例 4.3]（再考）

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad K(s) = \frac{K_0}{s+1} \quad (K_0 > 0)$$



$$r(s) = \frac{1}{s}$$

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{K_0}{\underline{s}(s+1)}$$

1 型

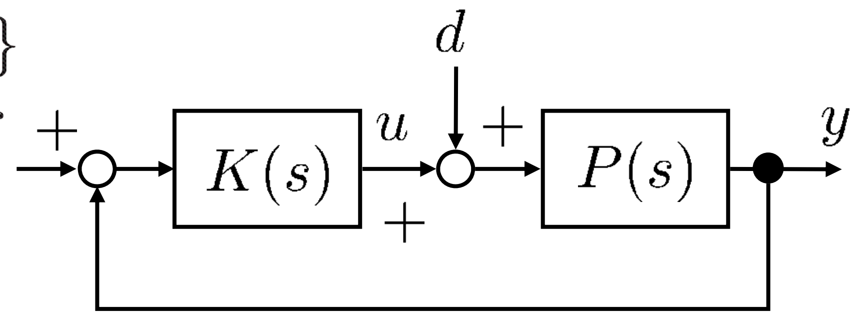
K_0 の値に関係なく定常位置偏差 $= 0$

$$L(0) = \infty \quad \left(\Leftrightarrow S(0) = \frac{1}{1 + L(0)} = 0 \right)$$

目標値の周波数成分 $(\omega = 0)$ に対して, ループゲインが無限大

外乱に対する定常偏差(目標値 $r=0$)

$$y(s) = P(s)\left\{d(s) + K(s)(\underbrace{r(s)}_{=0} - y(s))\right\}$$



$$(1+P(s)K(s))y(s) = P(s)d(s)$$

$$y(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}d(s)$$

ステップ外乱 $d(s) = \dfrac{1}{s}$

定常偏差 $\displaystyle \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sy(s) = \frac{P(0)}{1+P(0)K(0)}$

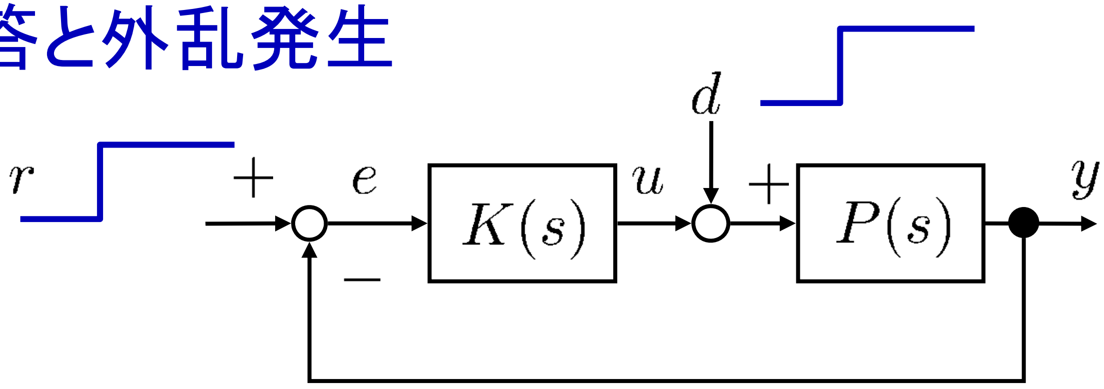
$K(0)=\infty$ または $P(0)=0$ ならば，定常偏差 $=0$

(実質的には)コントローラが積分器をもつことが重要

外乱の周波数成分($\omega=0$)に対して, コントローラのゲインが無限大

[例 4.4] 目標値応答と外乱発生

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad d(s) = \frac{1}{s}$$



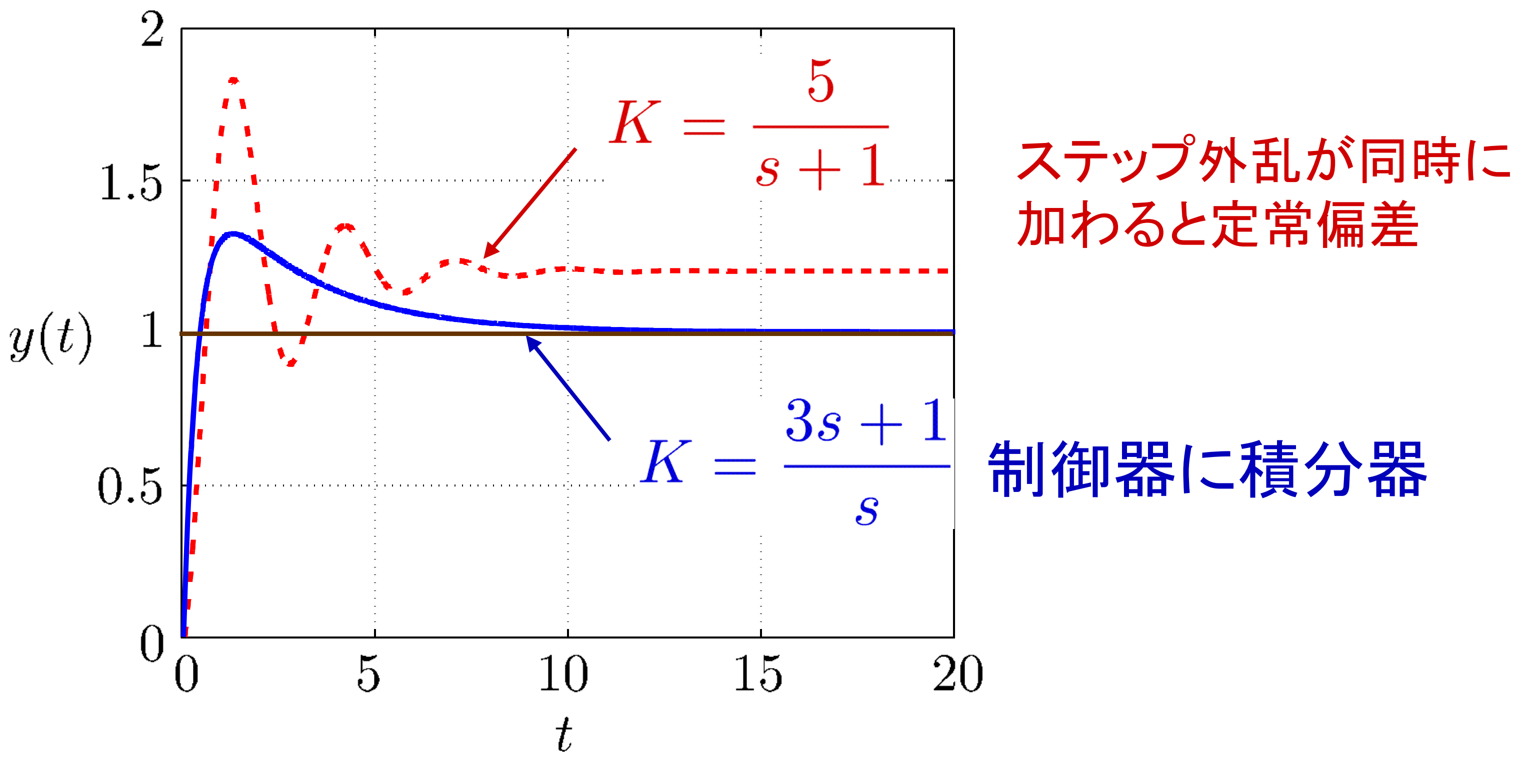


図4.5 ステップ外乱が存在するときの目標値応答

第 4 章：フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性

キーワード： 開ループ伝達関数（一巡伝達関数），定常偏差，偏差定数，l 型の制御系

学習目標： 定常偏差や偏差定数について理解する。
フィードバック制御系の型について理解する。