

第7章：フィードバック制御系のロバスト性解析

7.1 不確かさとロバスト性

キーワード：ロバスト性, モデル, 不確かさ,
ノミナルモデル, モデル集合

学習目標：モデルとそれに含まれる不確かさの概念を理解する。モデルの不確かさの記述法を習得する。

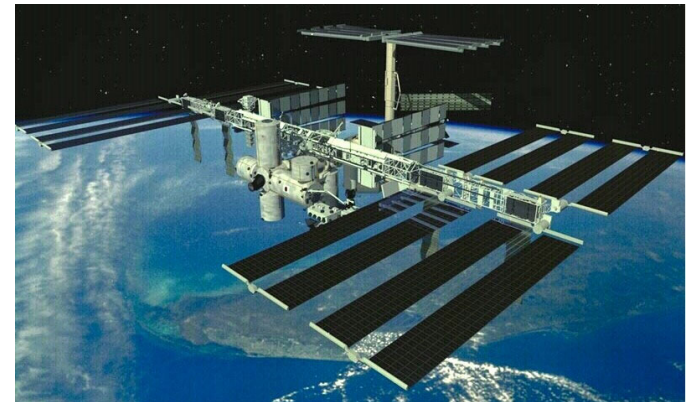
7 フィードバック制御系のロバスト性解析

7.1 不確かさとロバスト性

ロバスト(robust): 強い, 頑健な, 丈夫な...

モデルの不確かさ

- パラメータ値の誤差
- モデル化されない動特性
- 考慮されない非線形性
- 外乱 / 雑音
- 動作範囲 / 環境の変化



現実のシステム



モデル $P(s)$

[例 7.1] 高次の振動モード

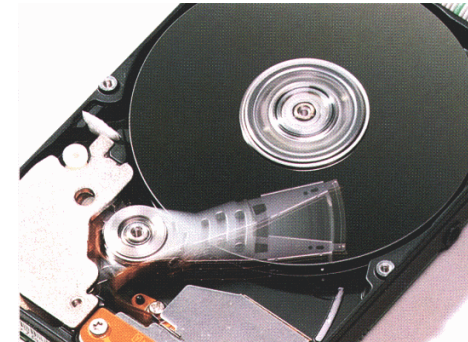
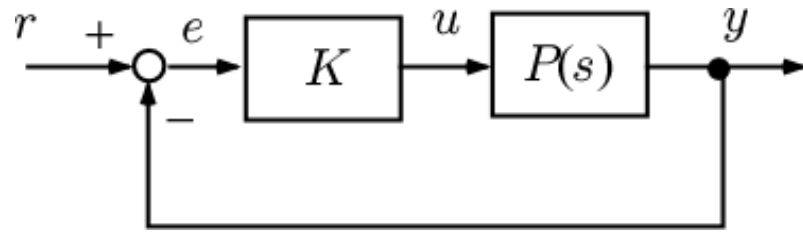


図 ハードディスク

1次系(制御対象)

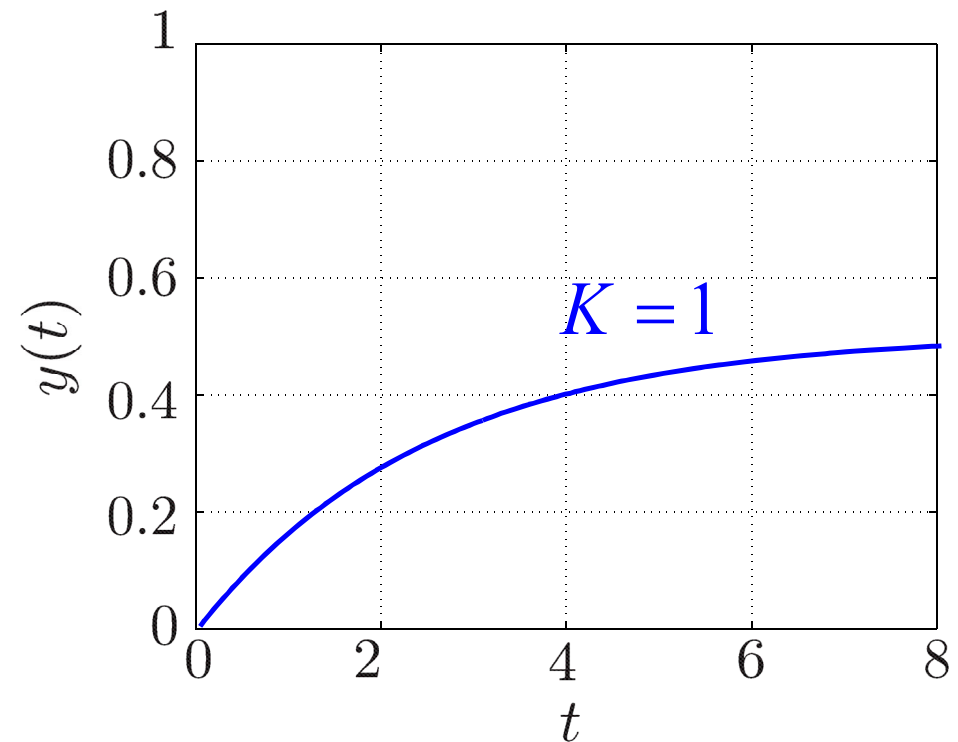
$$P(s) = \frac{1}{5s + 1}$$

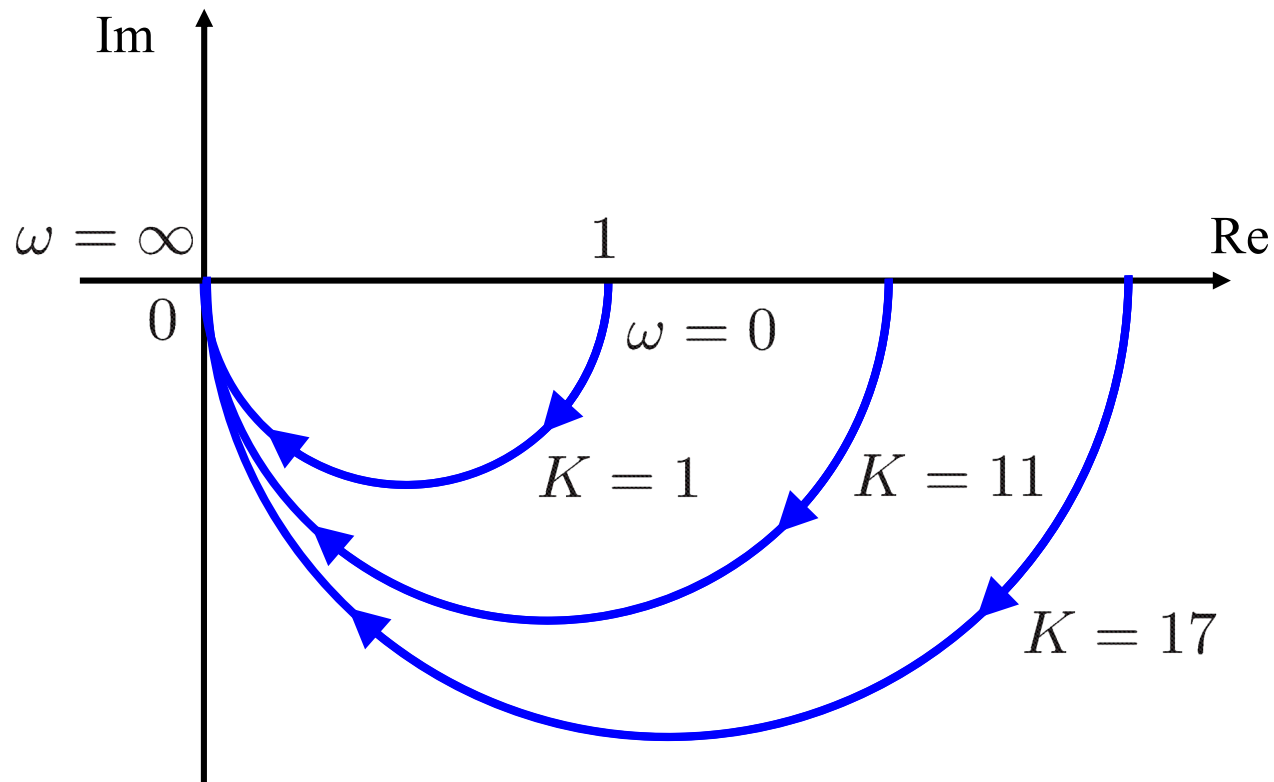
開ループ伝達関数

$$L(s) = P(s)K = \frac{K}{5s + 1}$$

定数ゲイン

$$K = 1$$





ゲイン余裕 = ∞



K どれだけ増やしても不安定にならない



不安定にならないことは現実的でない

制御対象 $P(s) = \frac{1}{5s + 1}$



実際の
制御対象 $\tilde{P}(s) = \frac{1}{5s + 1} \cdot \underbrace{\frac{4}{s^2 + 2s + 4}}_{\text{振動モード}}$

振動モード: $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$\omega_n = 2$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta = 0.5$$

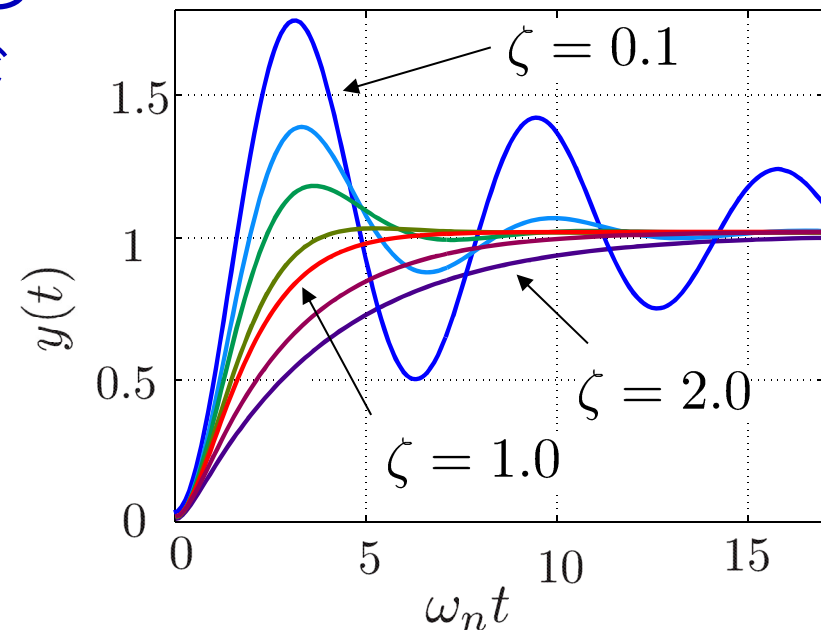
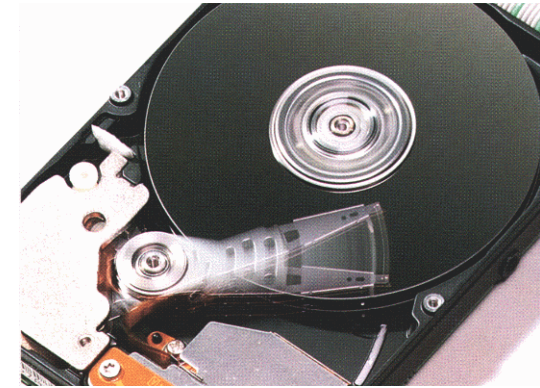


図3.7 2次系のステップ応答

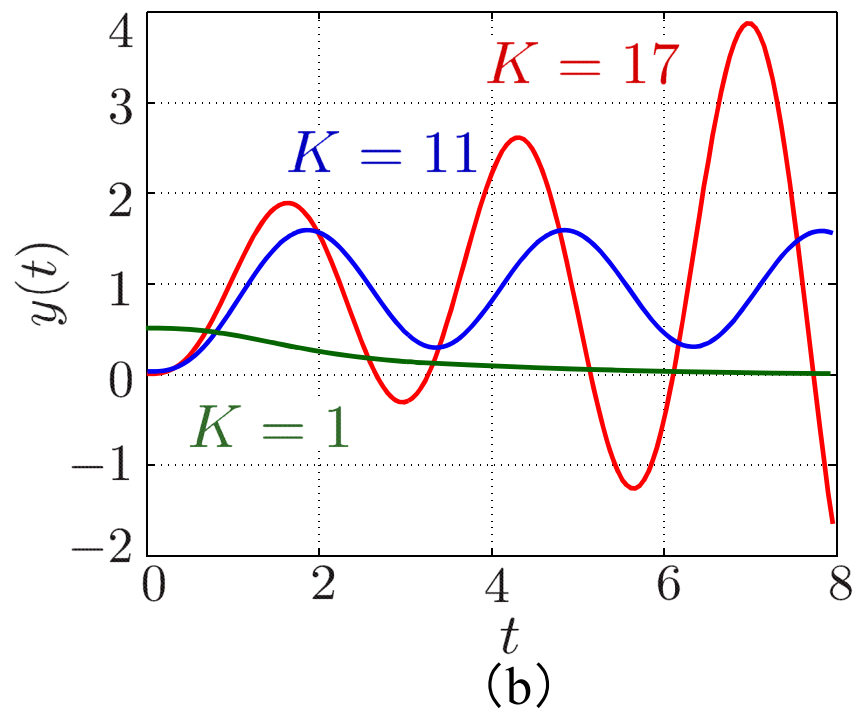
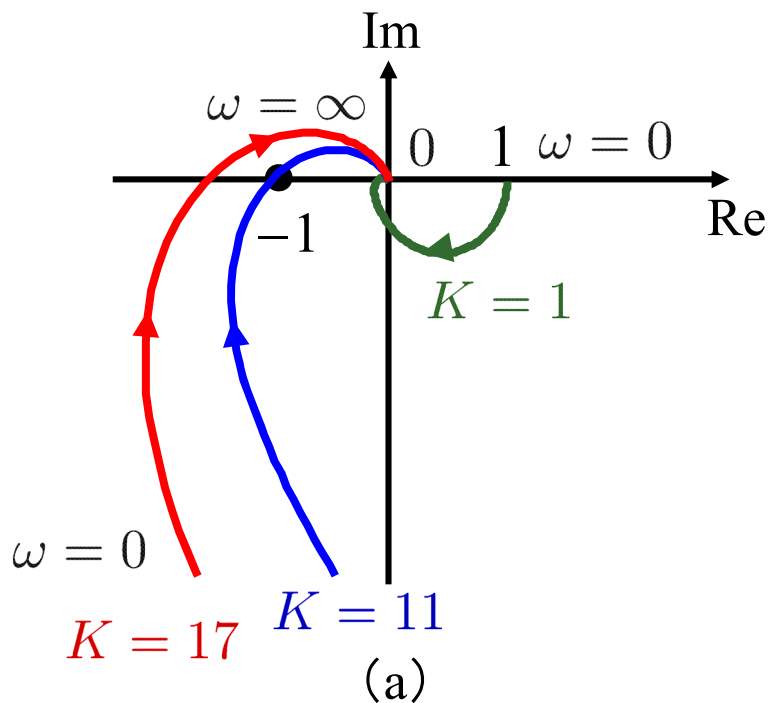


図 7.2 振動モードを有する系のベクトル軌跡とステップ応答

$K = 1$ 低周波域, 定常特性:あまり影響がない

$K = 11$ 安定限界

$K = 17$ 不安定

K を増大すると, フィードバックの効果があるが, モデルの不確かさによって, 不安定になる



ロバスト性が必要

[例 7.2] むだ時間

開ループ伝達関数

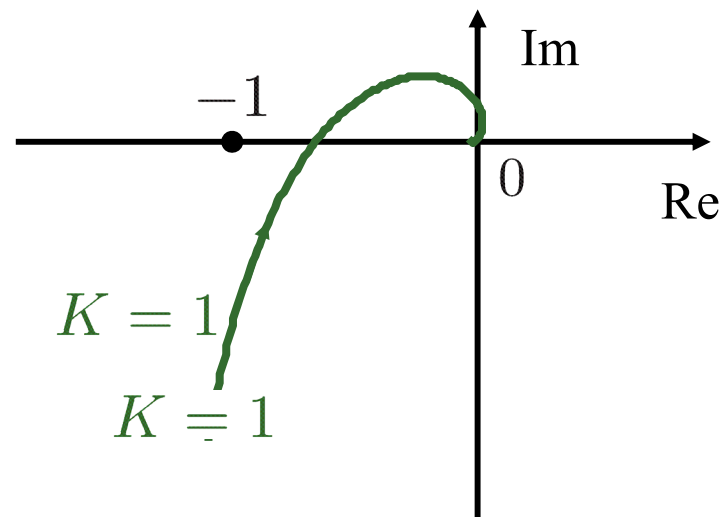
$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

実際の開ループ系

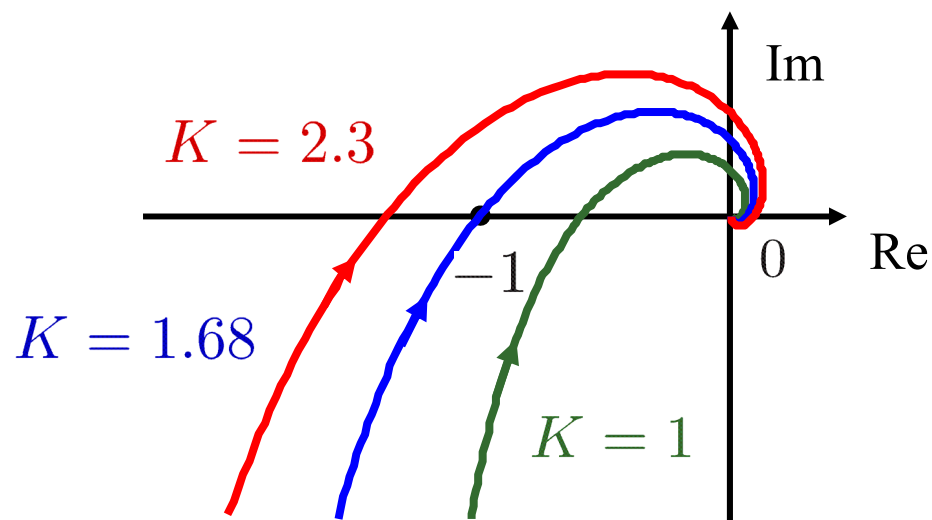
$$\tilde{L}(s) = \frac{K e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}$$

e^{-s} : 無視したむだ時間

同様に「モデルの不確かさに対するロバスト性」の問題がある



(a) むだ時間がない場合



(b) むだ時間を含む場合

図 7.3 むだ時間を含む系のベクトル軌跡

不確かさの記述

[例 7.3] ゲイン変動・時定数変動

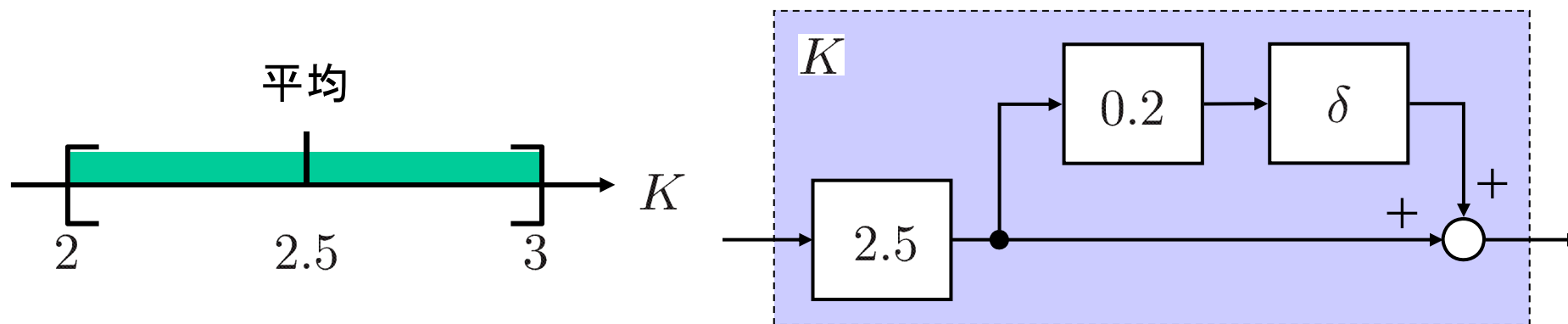
制御対象: $P(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad 2 \leq K \leq 3$

不確かなゲイン: $K = 2.5(1 + 0.2\delta), \quad |\delta| \leq 1$

2.5 を中心に $\pm 20\%$ の相対的変動

(例) $\delta = 1$ で $K = 3$

$\delta = -1$ で $K = 2$

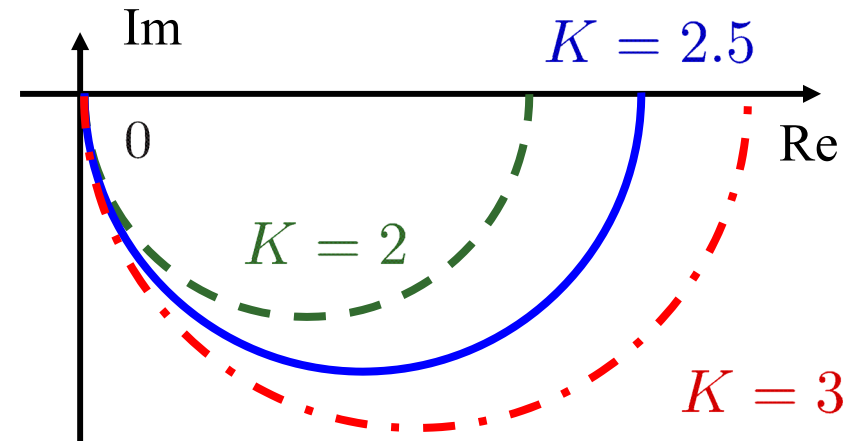


[例 7.3]

$$T = 2.5$$

$$K = 2, 2.5, 3$$

$$P : \left\{ \frac{2}{2.5s + 1}, \frac{2.5}{2.5s + 1}, \frac{3}{2.5s + 1} \right\}$$



$$2 \leq T \leq 3, 2 \leq K \leq 3$$

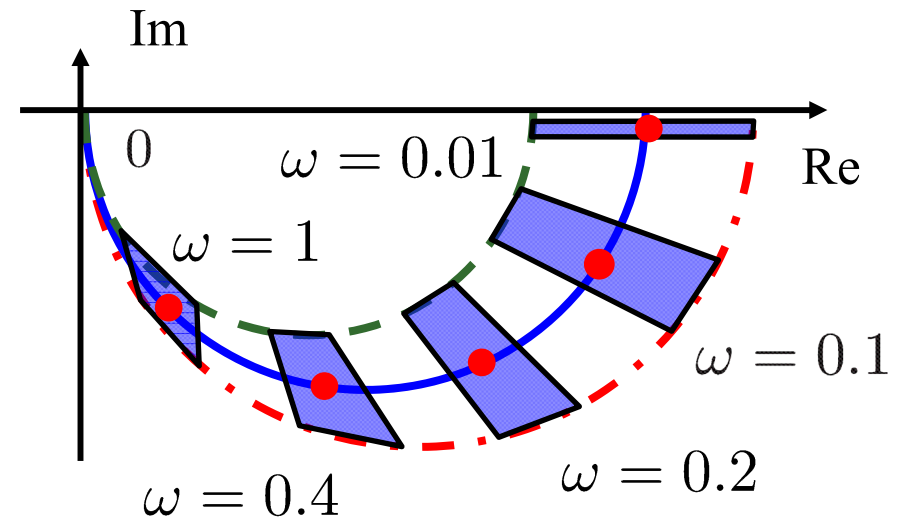
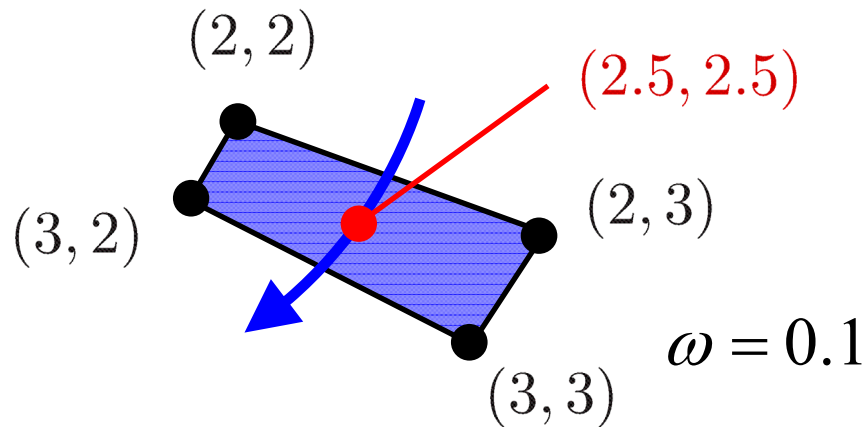


図 7.4 ゲイン変動・時定数変動を有する
1 次系のベクトル軌跡

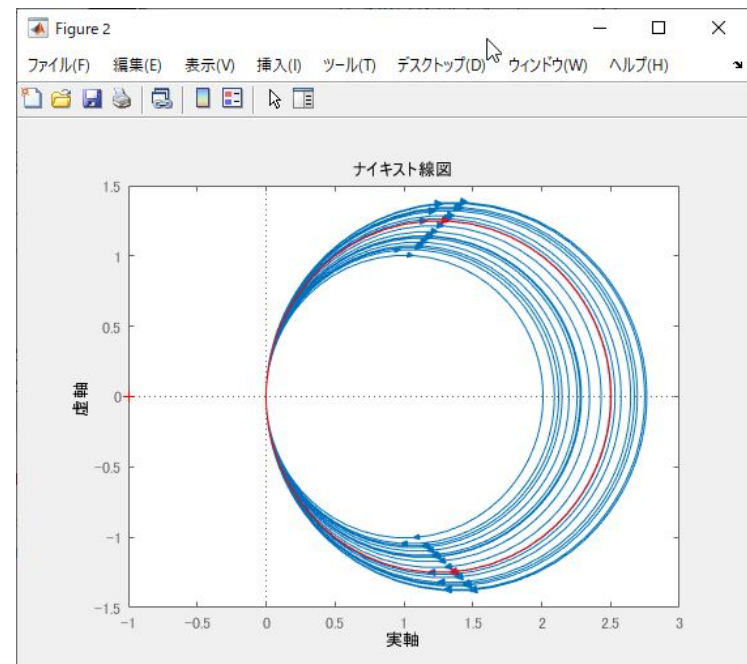
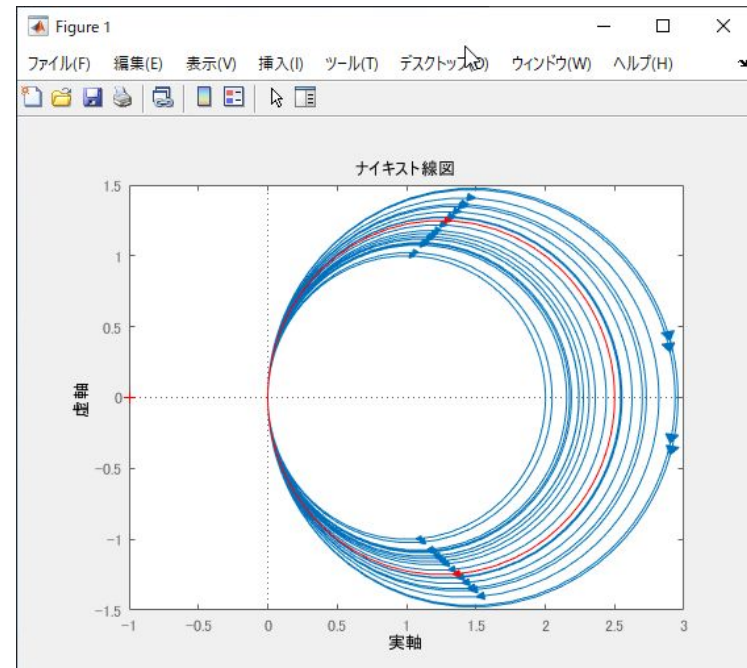
MATLAB

file1.m を実行

```
T_nom = 2.5;  
K_nom = 2.5;  
T = ureal('T',T_nom,'PlusMinus',[-0.5 0.5])  $T = 2 \sim 3$   
K = ureal('K',K_nom,'PlusMinus',[-0.5 0.5])  $K = 2 \sim 3$ 
```

```
figure(1)  
P = tf(K,[T_nom 1])  
nyquist(P)  
hold on  
P = tf(K_nom,[T_nom 1])  
nyquist(P,'r')
```

```
figure(2)  
P = tf(K,[T 1])  
nyquist(P)  
hold on  
P = tf(K_nom,[T_nom 1])  
nyquist(P,'r')
```



1本のベクトル軌跡 → ベクトル軌跡の「帯」

帯の幅: モデルの不確かさの「大きさ」を表している.

(ゲインに着目)

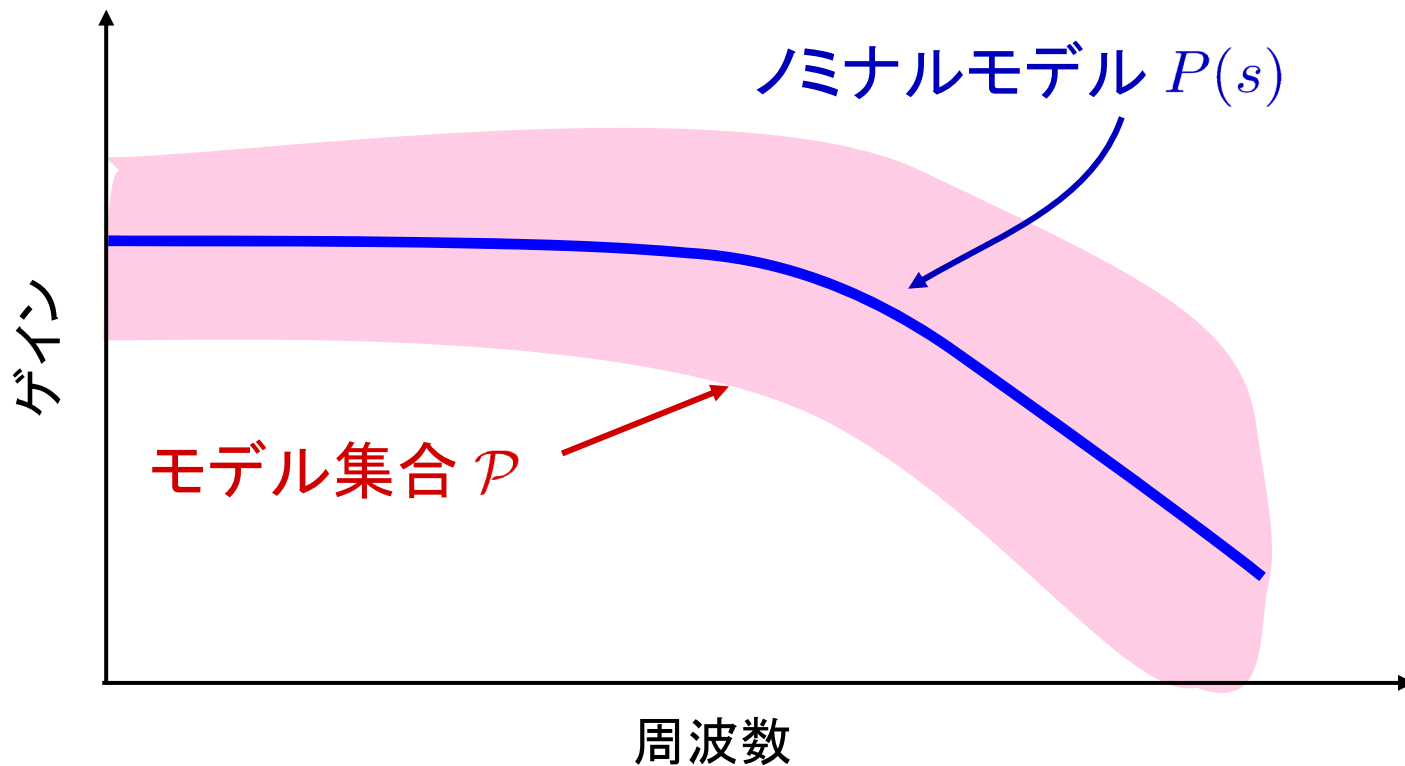


図 7.5 不確かさと周波数応答の帯

不確かなシステム (cf. 不確かなゲイン)

$$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))\underline{P}(s), \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega$$

公称モデル (ノミナルモデル)

$W_2(s)$: 不確かさの「**大きさ**」を記述 (ゲインに着目)

$\tilde{P}(s) \in \mathcal{P}$: モデル集合

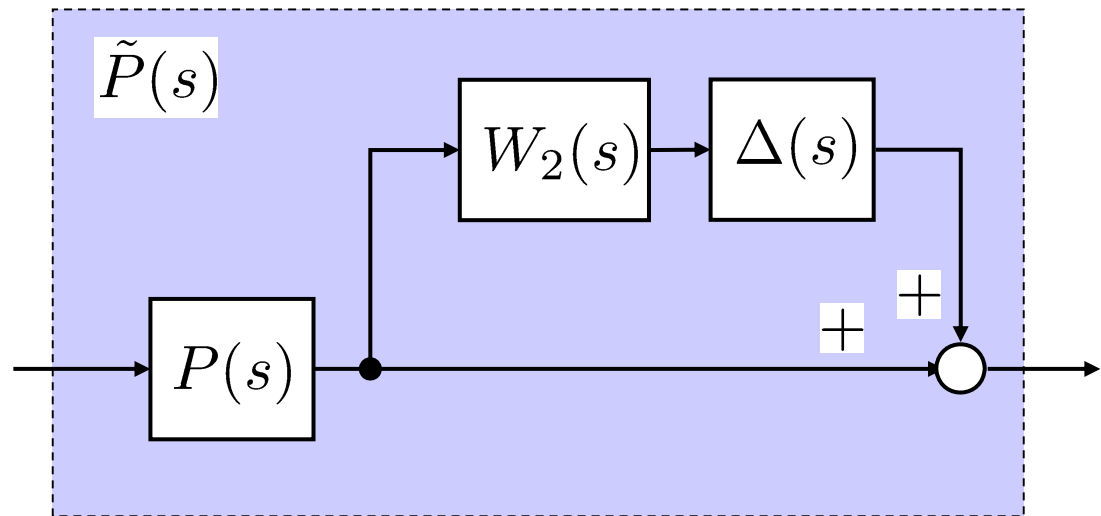
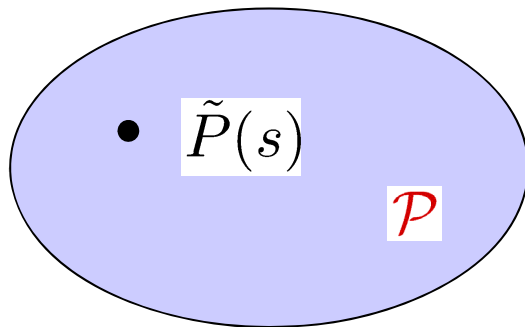


図 7.6 乗法的な不確かさとモデル集合

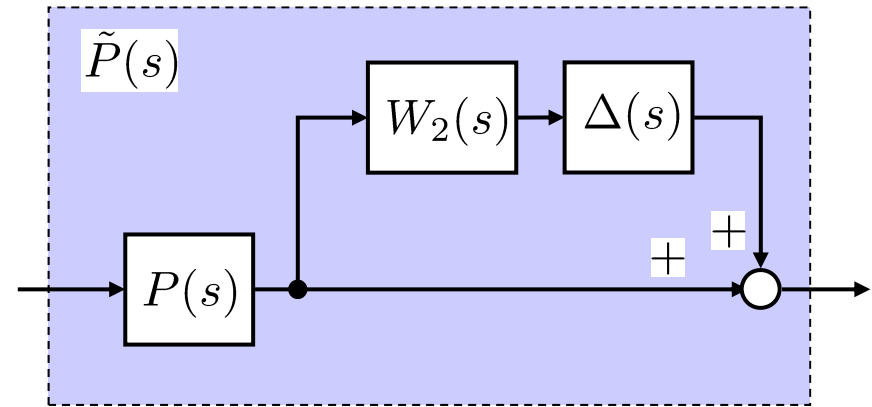
乗法的な不確かさ

$$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s)$$

$$\rightarrow \frac{\tilde{P}}{P} - 1 = \frac{\tilde{P} - P}{P} = \Delta W_2$$

(\Leftrightarrow 加法的な不確かさ)

(演習問題[3]を参照)



円盤型の不確かさ

$$|\tilde{P} - P| = |\Delta W_2 P| \leq |W_2 P|$$

$$(\because |\Delta| \leq 1)$$

周波数応答軌跡の「帯」を囲む
を参照

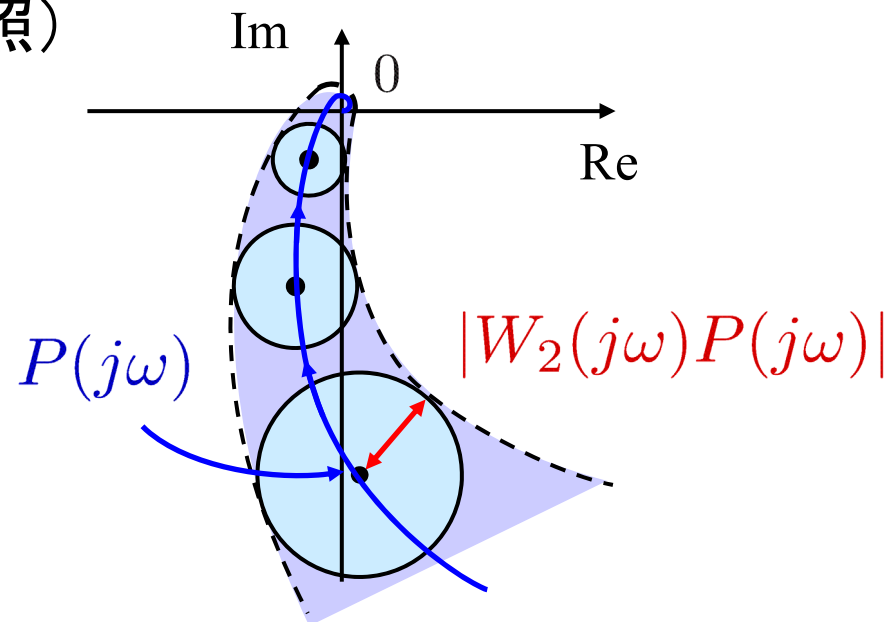


図 7.7 乗法的な不確かさと
モデル集合のベクトル軌跡

LEGOのモータのモデル (後期第1回資料を参照)

	(a) 入力30	(b) 入力50	(c) 入力100
	$T = 0.09$	$T = 0.08$	$T = 0.11$
	$K = \frac{300}{30} = 10$	$K = \frac{530}{50} = 10.6$	$K = \frac{940}{100} = 9.4$
不確かな モデル	$P_1(s) = \frac{10}{s(0.09s + 1)}$	$P_2(s) = \frac{10.6}{s(0.08s + 1)}$	$P_3(s) = \frac{9.4}{s(0.11s + 1)}$

ノミナルモデル(モータの入力から角度)

$$P(s) = \frac{1}{s} P_1(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} = \frac{10}{s(0.0933s + 1)}$$

MATLAB

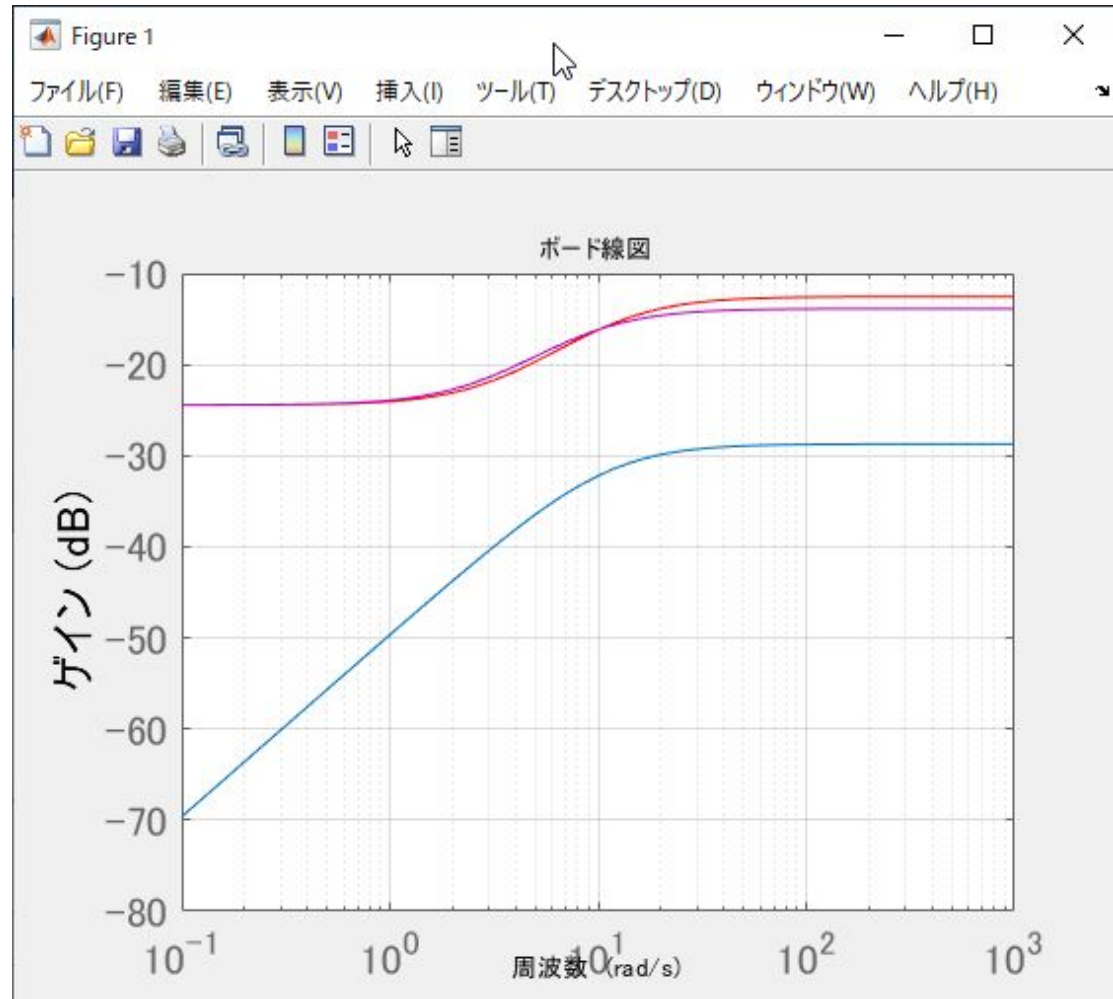
file2.m を実行

— $\frac{P_1(s) - P(s)}{P(s)}$

— $\frac{P_2(s) - P(s)}{P(s)}$

— $\frac{P_3(s) - P(s)}{P(s)}$

乗法的な不確かさ $\frac{\tilde{P}(s) - P(s)}{P(s)}$



$W_2(s)$ を設計

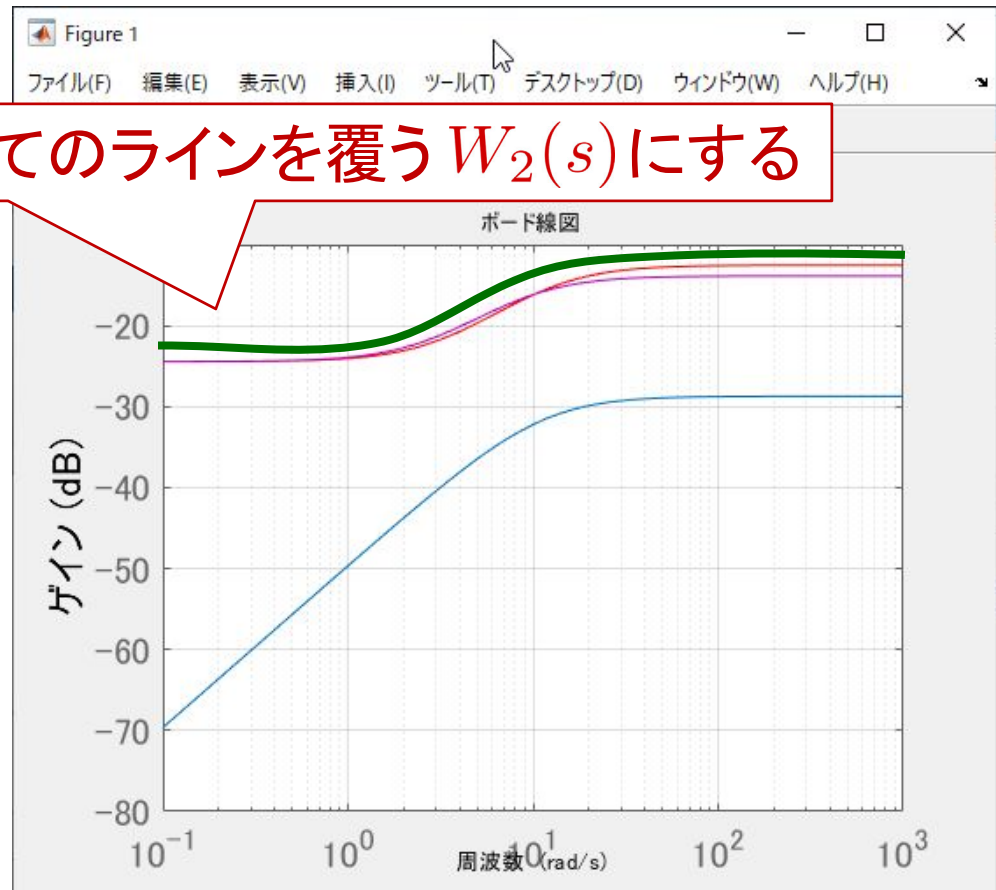
file2.m を実行

```
K_nom = 10;  
T_nom = 0.0933;  
P_nom = tf(K_nom, [T_nom 1 0])
```

.....

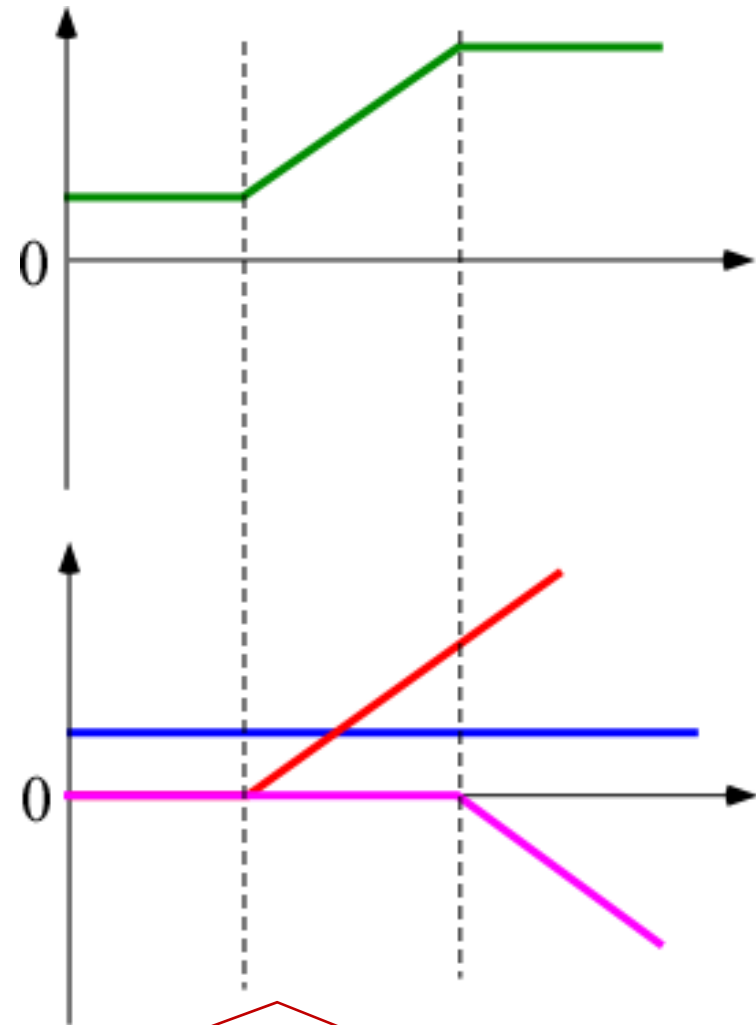
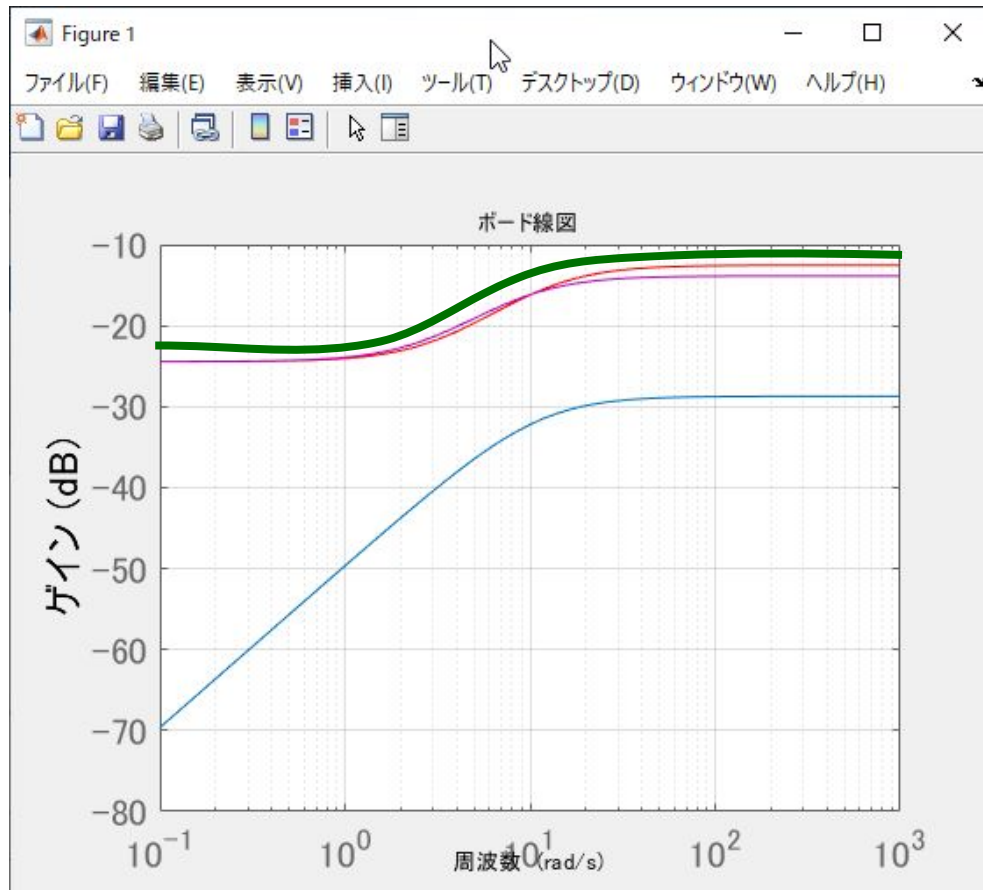
```
figure(1)  
bodemag(W2_1)  
hold on  
grid on  
bodemag(W2_2, 'r')  
hold on  
bodemag(W2_3, 'm')  
hold on  
set(gca, 'fontsize', 16)  
set(gca, 'xtick', [1e-2 1e-1 1 1e1 1e2 1e3])
```

すべてのラインを覆う $W_2(s)$ にする



```
W2 = ;  
bodemag(W2, 'g')  
hold on
```

%を外して, W2 に伝達関数を書く



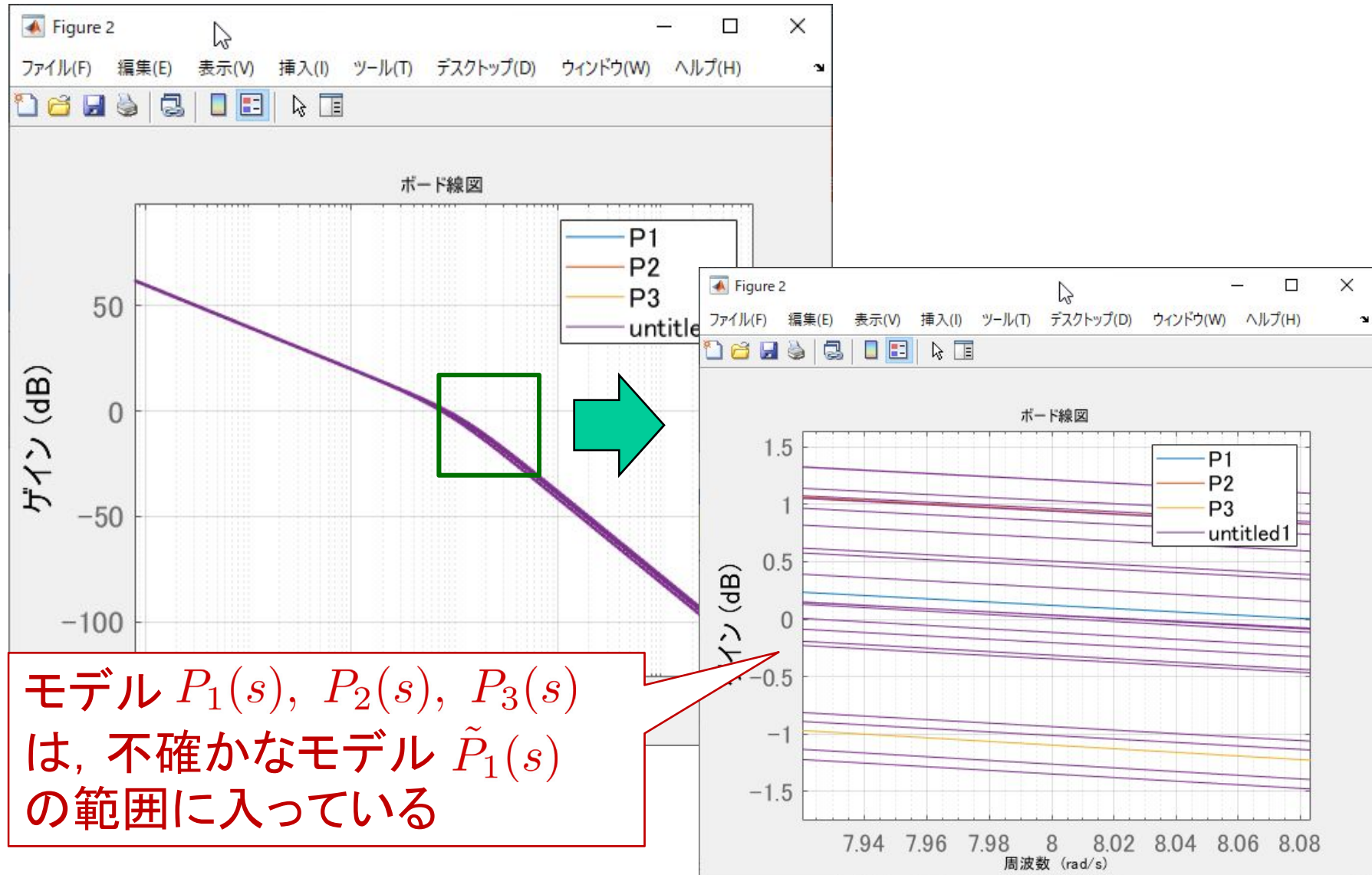
3つの伝達関数に分解できる

$$W_2(s) = K \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

表 5.1 基本要素のボード線図

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K		
s		
$\frac{1}{s}$		
$Ts + 1$		
$\frac{1}{Ts + 1}$		
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$		

file3.m を実行



モデル $P_1(s)$, $P_2(s)$, $P_3(s)$ は, 不確かなモデル $\tilde{P}_1(s)$ の範囲に入っている

$$\tilde{P}(s) = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s)$$

第7章：フィードバック制御系のロバスト性解析

7.1 不確かさとロバスト性

キーワード：ロバスト性, モデル, 不確かさ,
ノミナルモデル, モデル集合

学習目標：モデルとそれに含まれる不確かさの概念を理解する。モデルの不確かさの記述法を習得する。