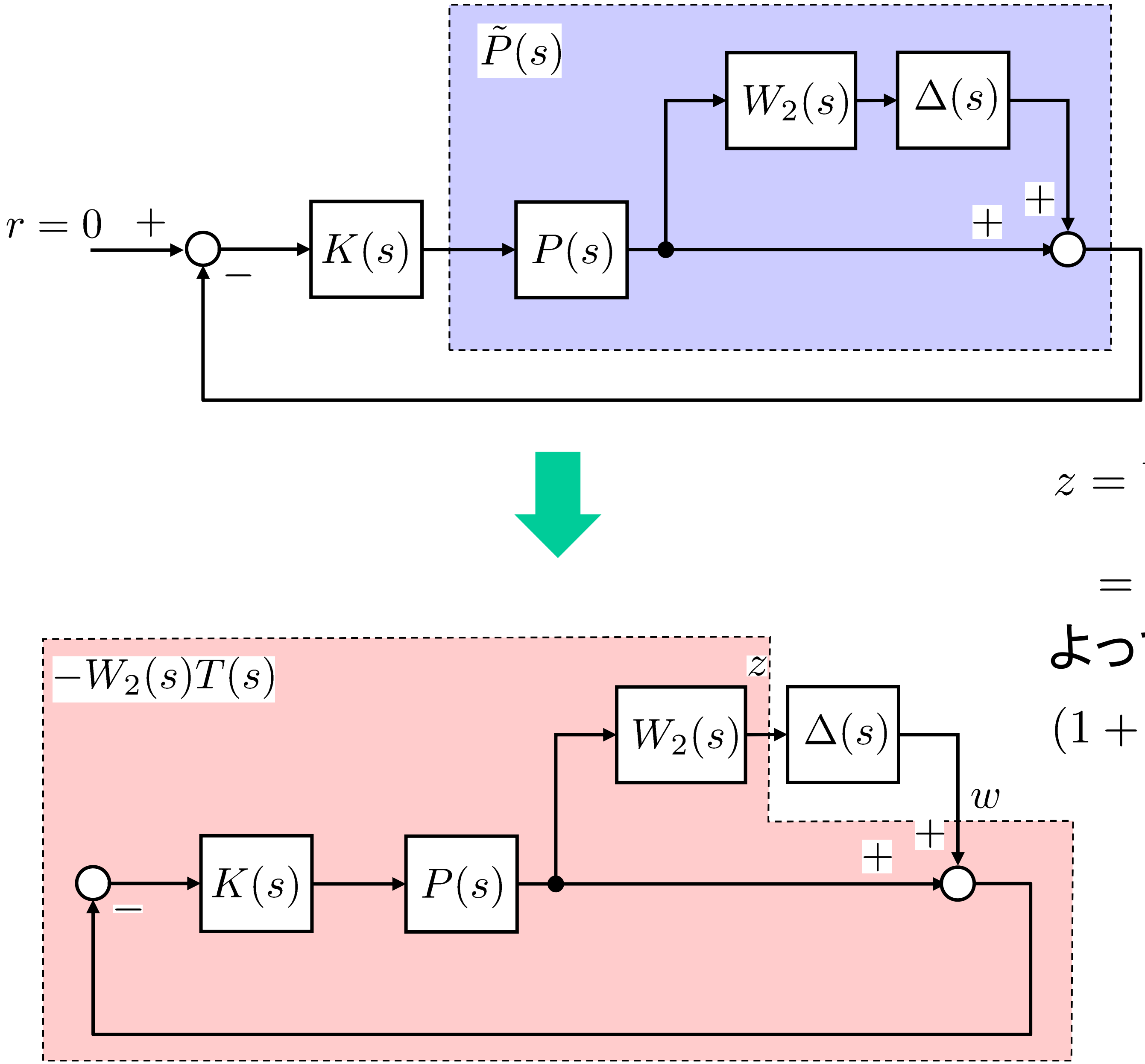
第 7 章 :フィードバック制御系のロバスト性解析

7.3 制御性能のロバスト性

キーワード : ノミナル性能, 感度関数
ロバスト性能

学習目標 : ノミナル性能, 制御性能のロバスト性について理解する。

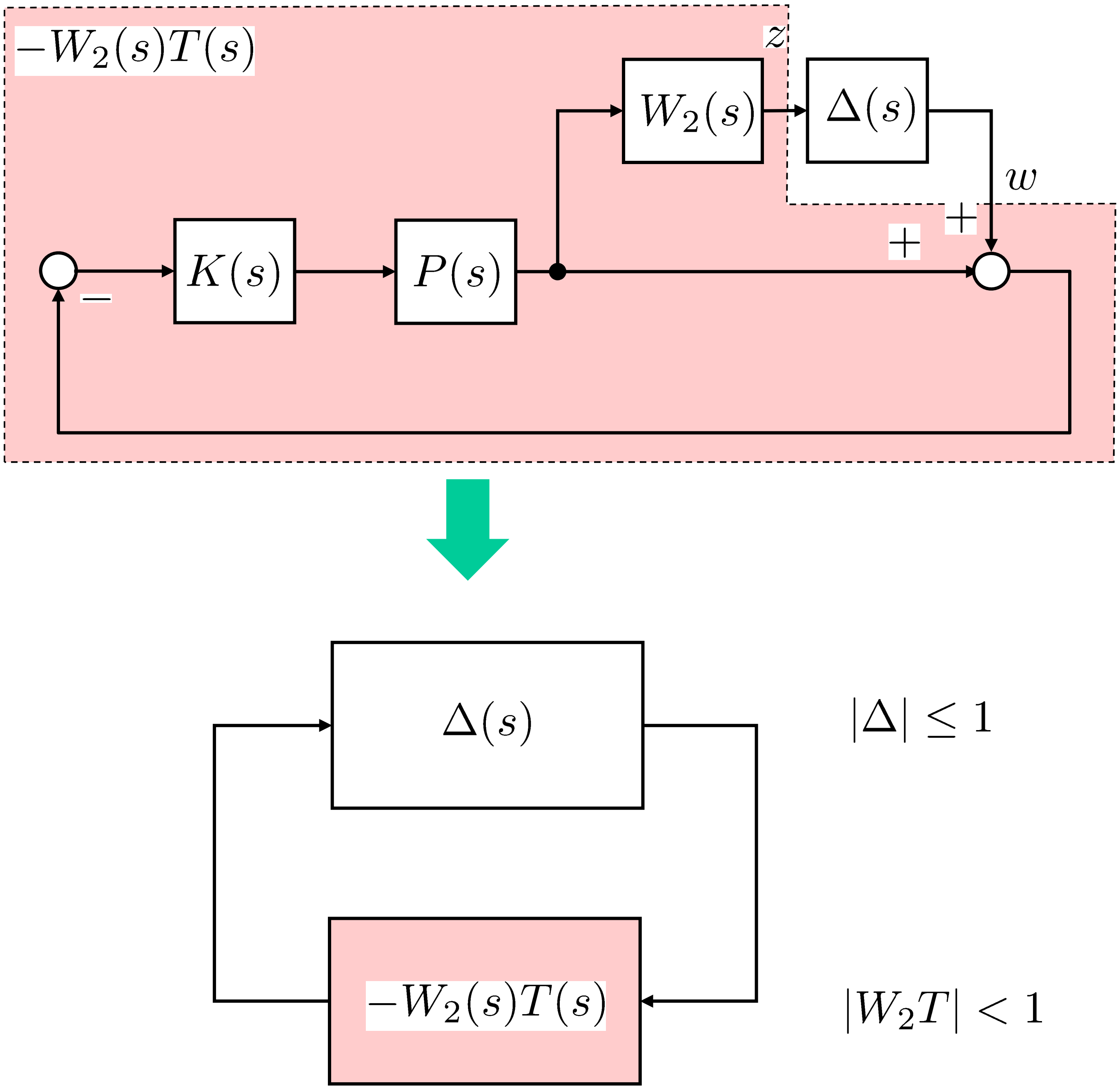


$$z = W_2PK\left(-w - \frac{z}{W_2}\right)$$
$$= -W_2PKw - PKz$$

よって

$$(1+PK)\,z = -W_2PKw$$
$$\frac{z}{w} = \frac{-W_2PK}{1+PK}$$
$$= -W_2T$$

図 7.12 ロバスト安定性と小ゲイン定理



$|\Delta| \leq 1$

$|W_2 T| < 1$

7 フィードバック制御系のロバスト性解析
7.3 制御性能のロバスト性

ノミナル性能

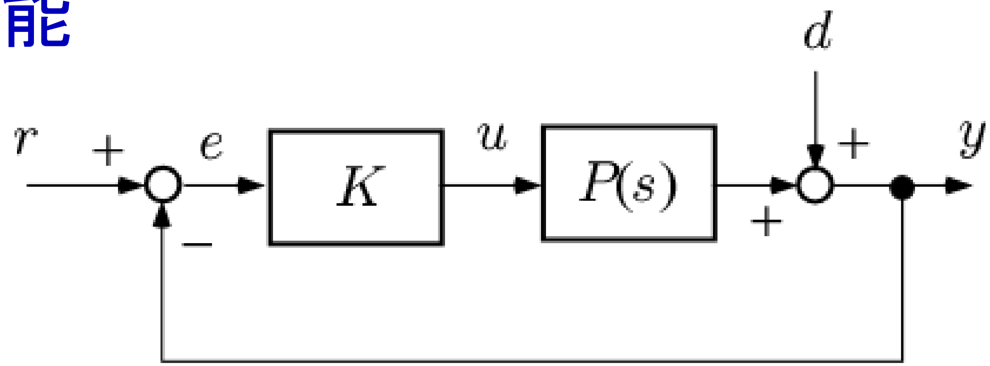


図 7.13 フィードバック制御系

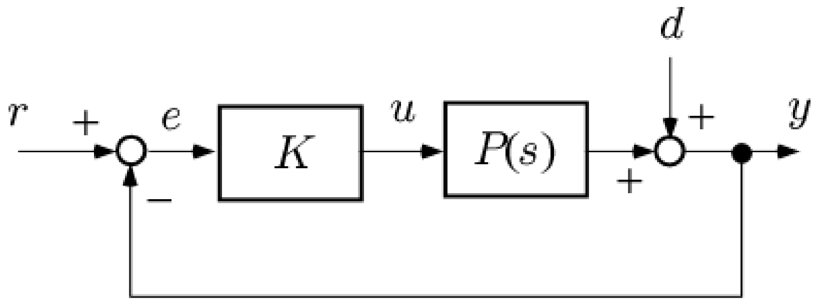
$$\Delta_T = \frac{1}{1+PK}\Delta_P$$ ：パラメータ変動に対する感度

$$y = \frac{1}{1+PK}d$$ ：外乱に対する感度

$$e = \frac{1}{1+PK}r$$ ：目標値応答

フィードバック性能の指標

$$S = \frac{1}{1+PK}$$ は小さい方がよい

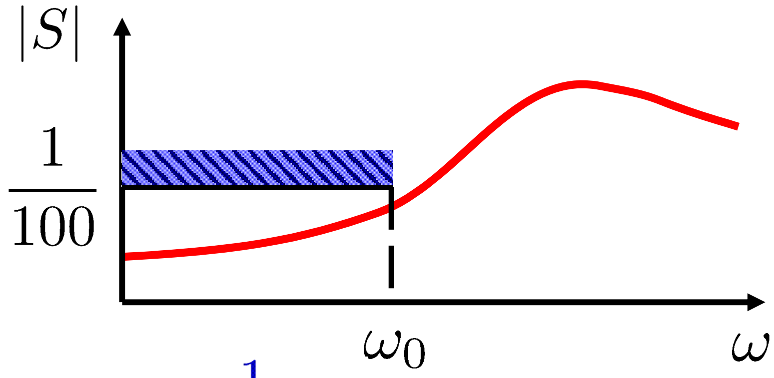


[例] 外乱 d（ω_0以下）で $\frac{1}{100}$ 未満にしたい

$y = Sd$ より

$$|S| < \frac{1}{100}, \quad {}^{\forall}\omega \leq \omega_0$$

$$|W_1| \geq 100, \quad {}^{\forall}\omega \leq \omega_0$$



$W_1(s)$: 重み関数

$$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \quad {}^{\forall}\omega$$

$$\Rightarrow \quad |W_1 S| < 1, \quad {}^{\forall}\omega$$

ノミナル性能

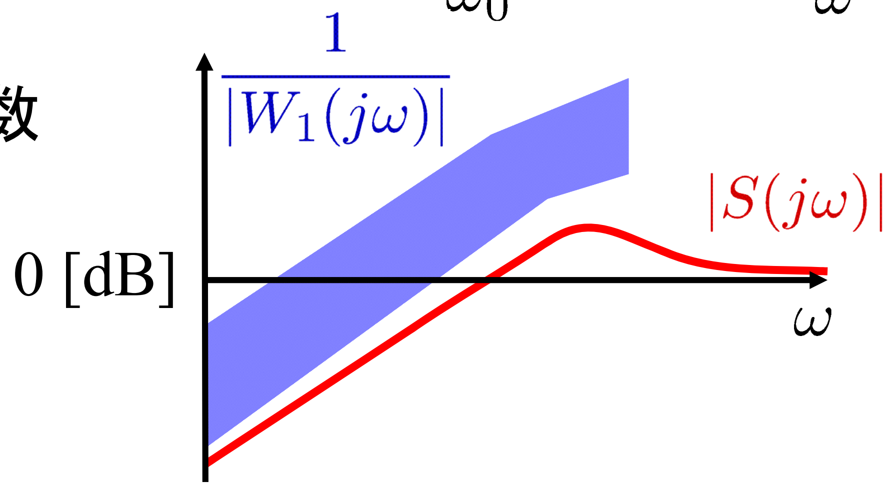


図 7.14 感度関数とノミナル性能

$$|W_1 S| < 1, \quad {}^{\forall}\omega \quad \Rightarrow \quad |W_1| < |1 + L|, \quad {}^{\forall}\omega$$

$$\left(S = \frac{1}{1 + PK} = \frac{1}{1 + L} \right)$$

L は $(-1, 0)$ から $|W_1|$ だけ離れていなければならない

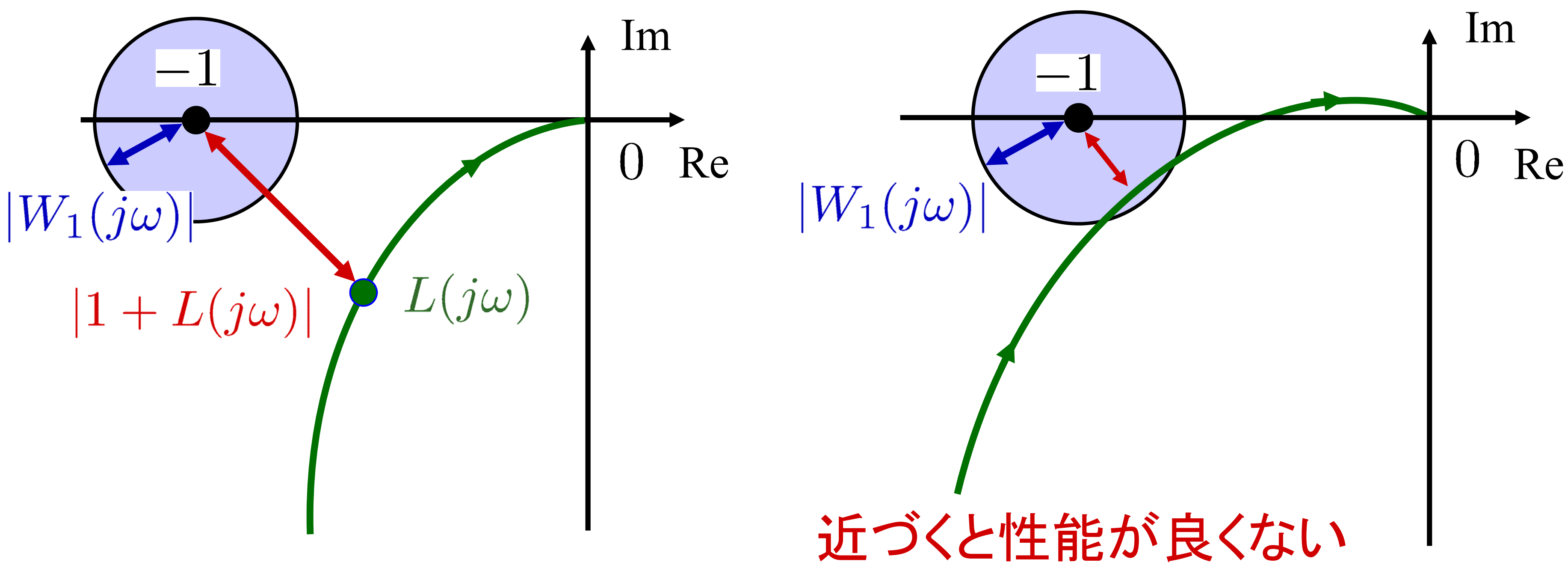


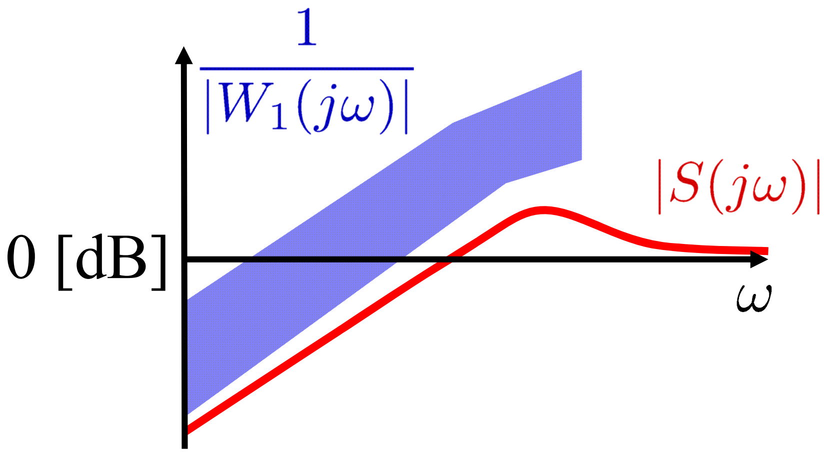
図 7.15 ベクトル軌跡によるノミナル性能

ノミナル性能

$$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \quad {}^\forall\omega$$

$$\Rightarrow \ |W_1 S| < 1, \quad {}^\forall\omega$$

➡ S は小さい方が良い

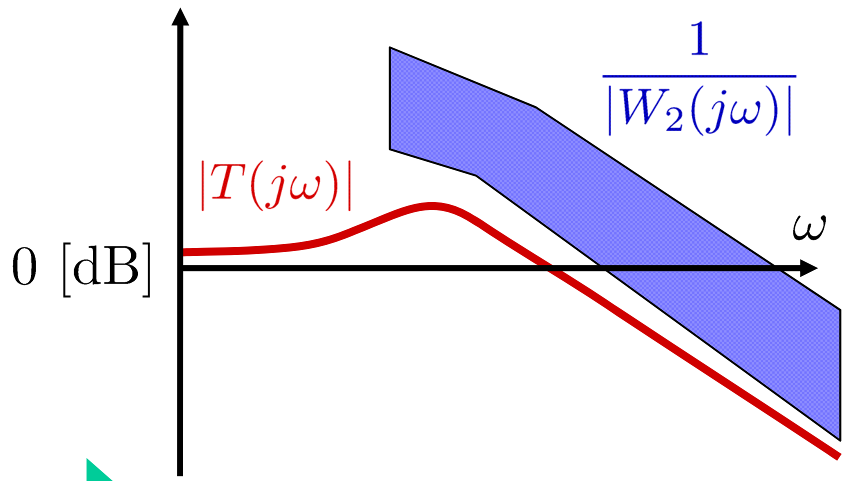


ロバスト安定性

$$|T| < \frac{1}{|W_2|}, \quad {}^\forall\omega$$

$$\Rightarrow \ |W_2 T| < 1, \quad {}^\forall\omega$$

➡ T は小さい方が良い

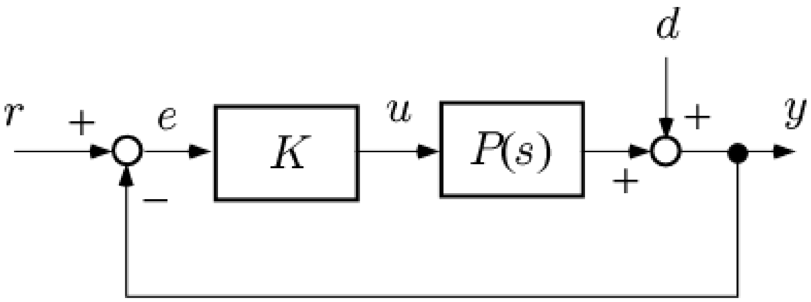


⟷ トレードオフ

補間条件 $S + T = 1$

ロバスト性能

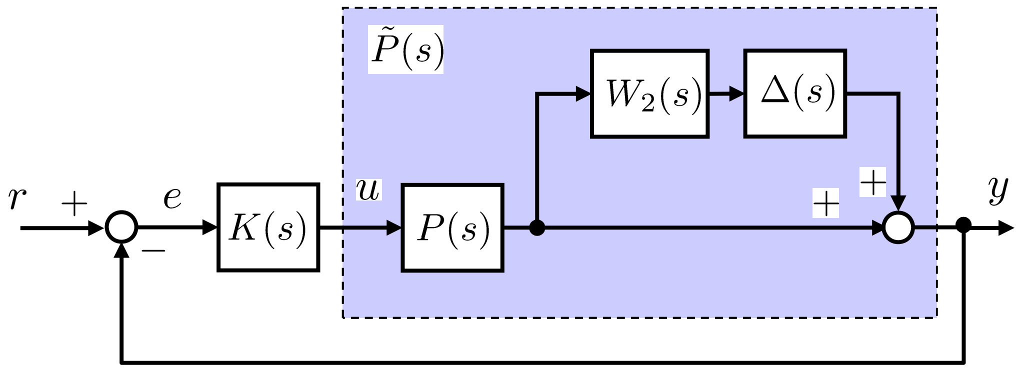
（不確かな）感度関数



$$\tilde{S} = \frac{1}{1+\tilde{P}K}, \quad \tilde{P} = (1+\Delta W_2)P$$

（$\Delta = 0$ のとき $\tilde{P} = P,\ \tilde{S} = S$ ：ノミナル性能）

不確かさがある場合でも,（安定性だけでなく）
性能も保持されるのか？

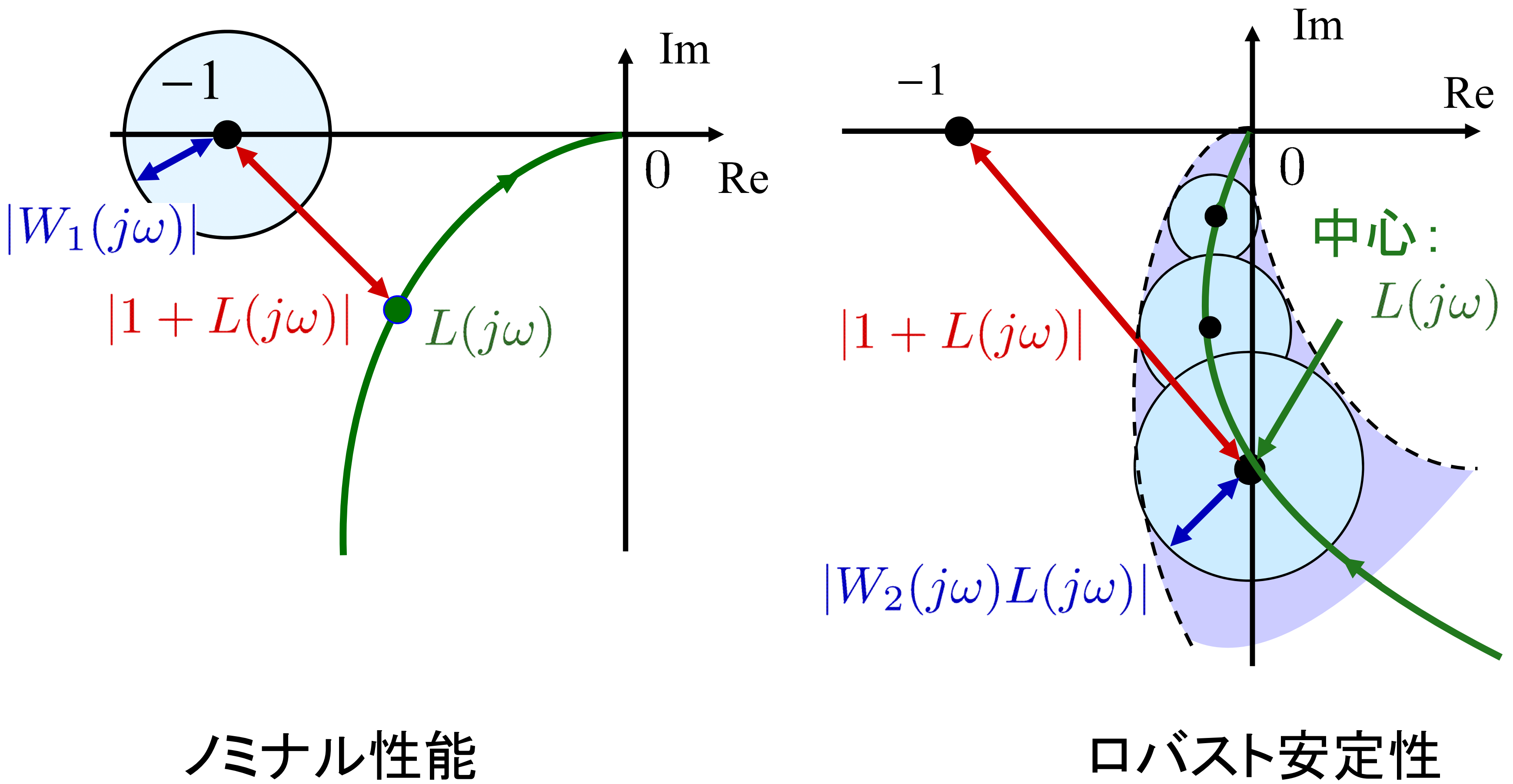


ロバスト性能

（i）ロバスト安定

(ii) $|W_1\tilde{S}| < 1, \quad {}^\forall\omega, \quad {}^\forall\tilde{P} \in \mathcal{P}$

任意の $\tilde{L}$ について, そのベクトル
軌跡が $(-1,0)$ から $|W_1|$ だけ離れていなければならない



ロバスト性能条件

$$|W_1| + |W_2 L| < |1 + L|$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{W_1}{1+L}\right| + \left|\frac{W_2 L}{1+L}\right| < 1$$

よって

$$|W_1 S| + |W_2 T| < 1, \quad {}^{\forall}\omega$$

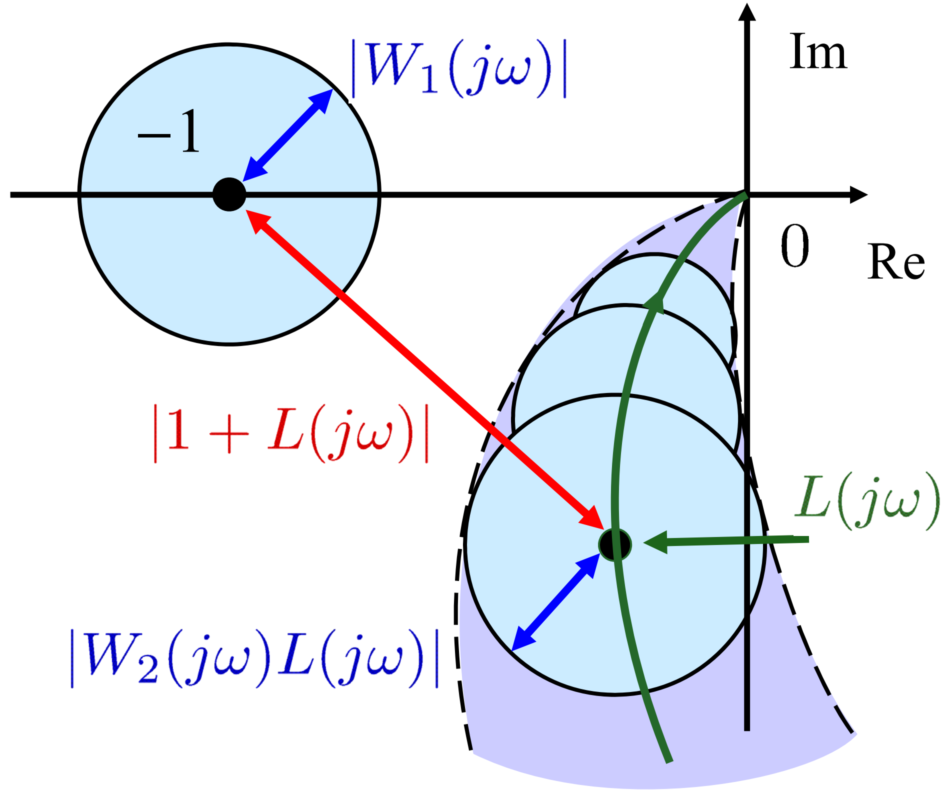


図 7.16　ベクトル軌跡による
ロバスト性能

フィードバック制御系のロバスト性解析

ノミナル安定（NS）： $\phi = D_P D_K + N_P N_K = 0$ が安定

（S, T, KS, PS が安定）

ノミナル性能（NP）： $|W_1 S| < 1, \quad {}^\forall \omega$

ロバスト安定（RS）： $|W_2 T| < 1, \quad {}^\forall \omega$

ロバスト性能（RP）： $|W_1 S| + |W_2 T| < 1, \quad {}^\forall \omega$

補間条件： $S + T = 1, \quad {}^\forall \omega$

MATLAB演習

7章演習問題【5】

$$P(s) = \frac{1}{s} \qquad K(s) = 1$$

$$W_2(s) = \frac{s}{1.5} \qquad W_1(s) = \frac{1}{1.5s}$$

ロバスト安定

$$\left|\frac{W_2 L}{1+L}\right| < 1, \quad {}^{\forall}\omega \qquad |T| < \frac{1}{|W_2|}, \quad {}^{\forall}\omega$$

ノミナル性能

$$|W_1 S| < 1, \quad {}^{\forall}\omega \qquad |S| < \frac{1}{|W_1|}, \quad {}^{\forall}\omega$$

file7_1.m を実行

```
P_nom = tf(1,[1 0])
K = 1;

W2 = tf([1 0],[1.5]);

D = ultidyn('Delta',[1 1]);
T = feedback(P_nom*K,1);

figure(1)
nyquist(P_nom*K*(1 + W2*D))
figure(2)
hold on
bodemag(T)
hold on
bodemag(1/W2)
```

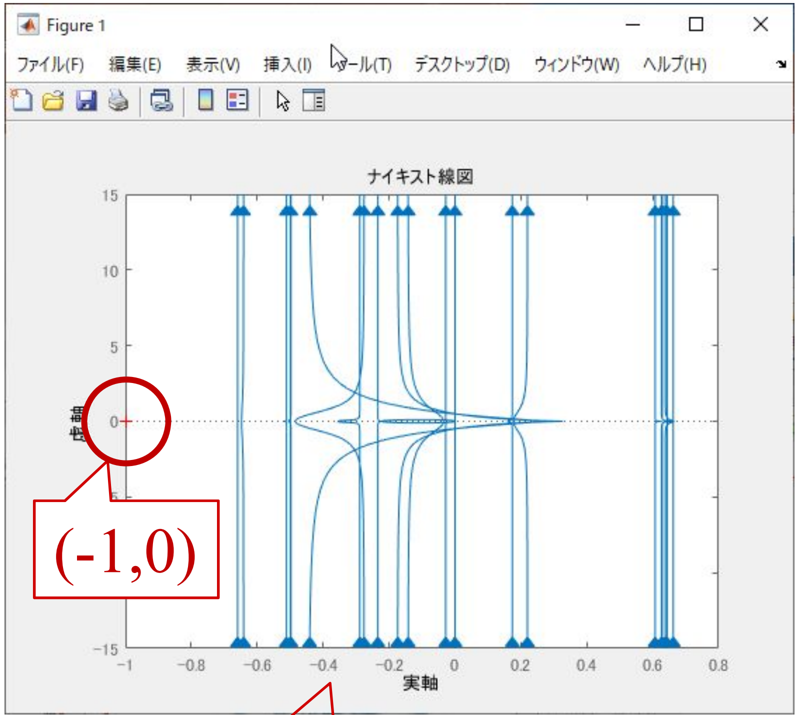
$$P(s) = \frac{1}{s}$$

$$K(s) = 1$$

$$W_2(s) = \frac{s}{1.5}$$

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$\tilde{P} = (1 + \Delta(s)W_2(s))P(s)K(s)$$

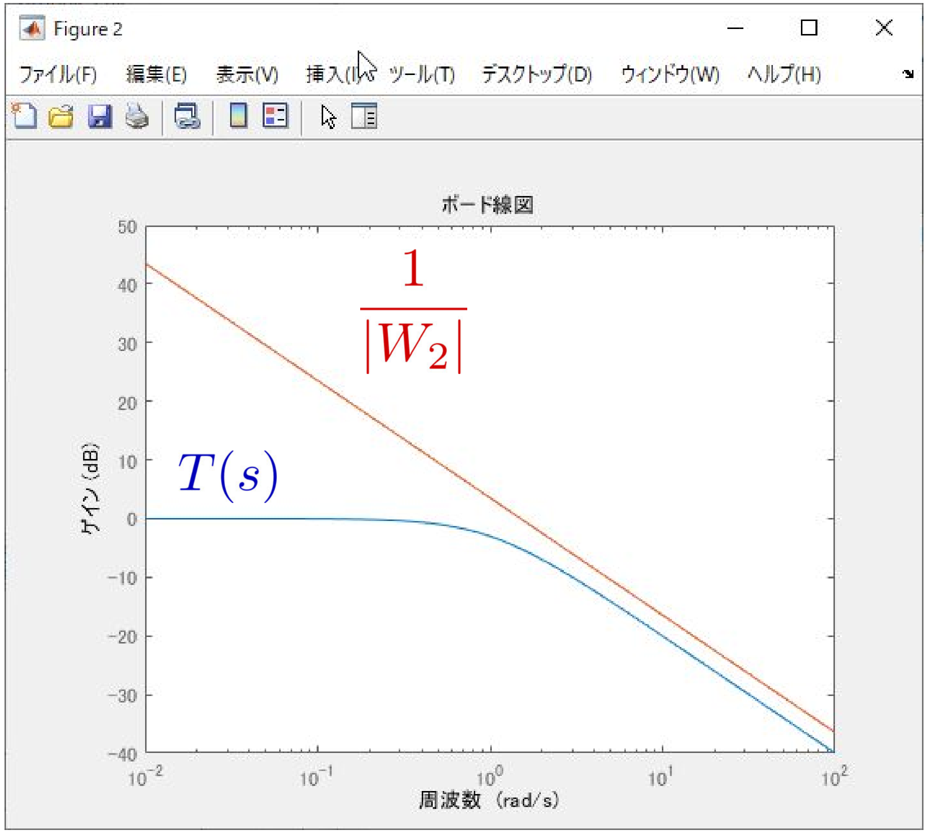


すべての $\tilde{P}$ が (-1,0)を左にみて通過する

ロバスト安定

$$|T| < \frac{1}{|W_2|}, \quad {}^\forall\omega$$

ロバスト安定



file7_2.m を実行

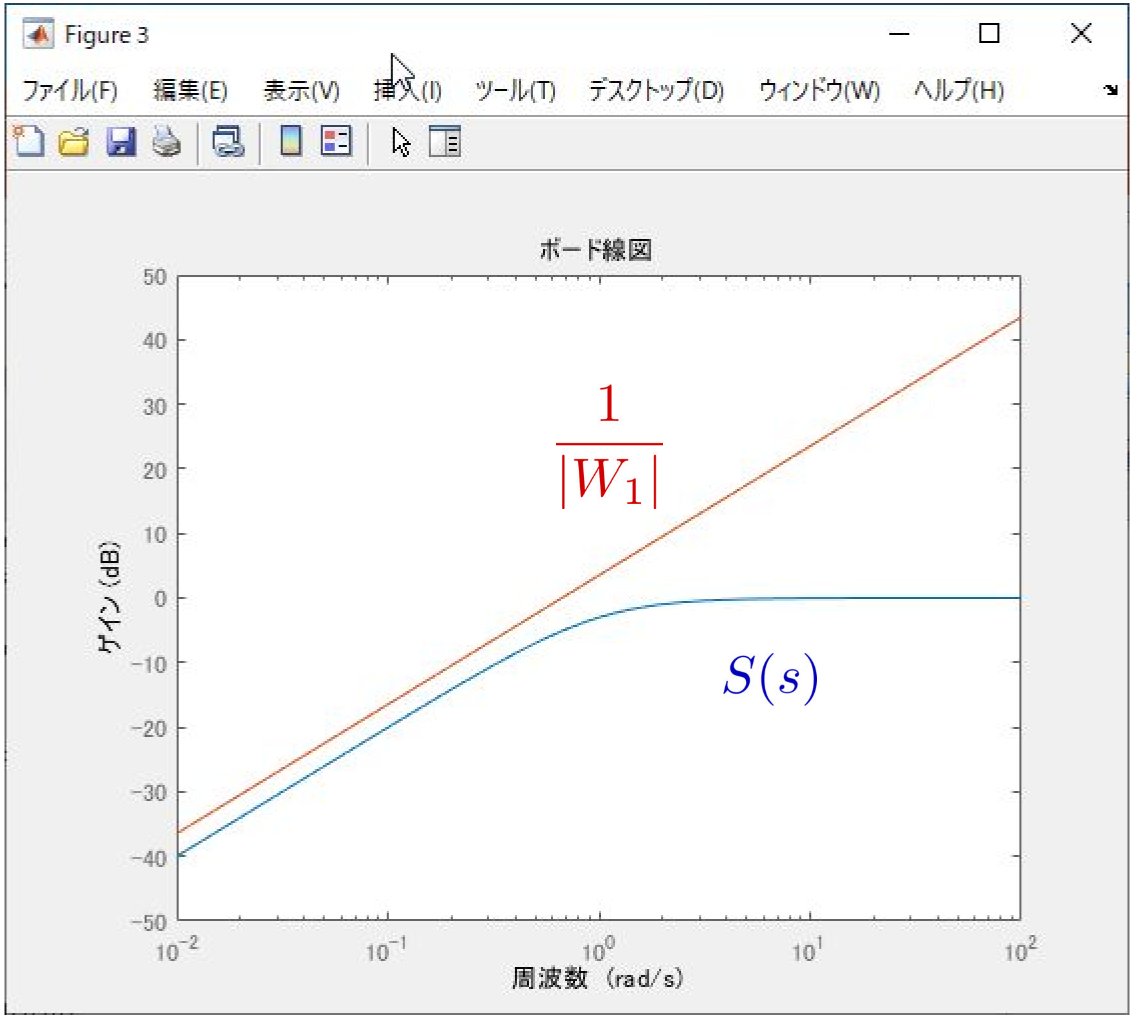
```
P_nom = tf(1,[1 0])
K = 1;

W1 = tf([1],[1.5 0]);

S = inv(1+P_nom*K)

figure(3)
bodemag(S)
hold on
bodemag(1/W1)
```

$$P(s) = \frac{1}{s}$$

$$K(s) = 1$$

$$W_1(s) = \frac{1}{1.5s}$$

$$T(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)}$$



$$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \quad {}^\forall \omega$$

ノミナル性能

file7_3.m を実行

```
omega=logspace(-2,3,100);

P_nom = tf(1,[1 0])
K = 1;

W1 = tf([1],[1.5 0]);
W2 = tf([1 0],[1.5]);

D = ultidyn('Delta',[1 1]);
T = feedback(P_nom*K,1);
Stilde = inv(1+P_nom*K*(1 + W2*D));
S = inv(1+P_nom*K);

figure(4)
bodemag(Stilde)
hold on
bodemag(1/W1)
grid on
```

$$P(s) = \frac{1}{s}$$

$$K(s) = 1$$

$$W_1(s) = \frac{1}{1.5s}$$

$$W_2(s) = \frac{s}{1.5}$$

$$T(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)}$$

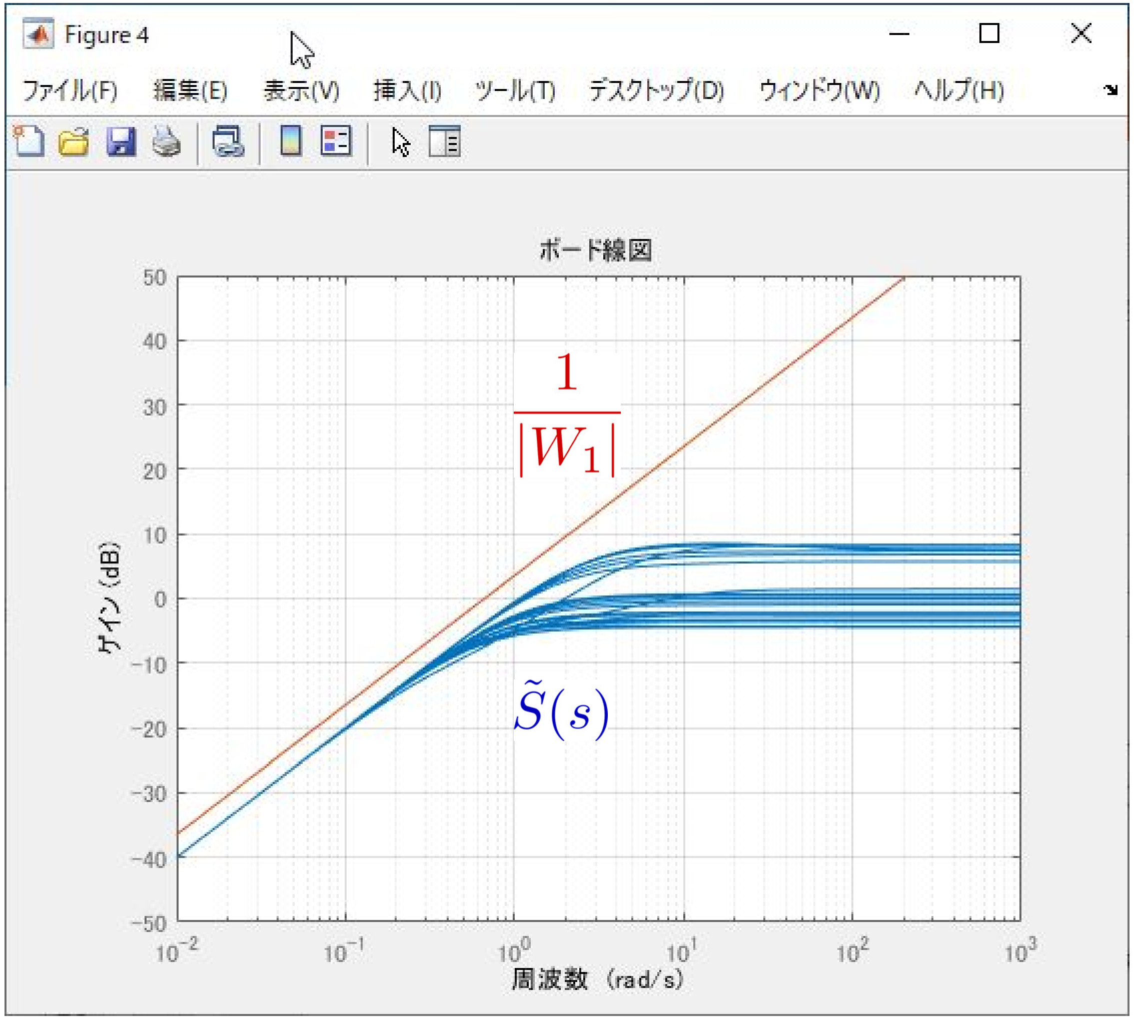
(続く)

```
[gain_W1S,phase_W1S]=bode(omega,W1*S);
 gain_W1S_dB=20*log10(gain_W1S(:));

 [gain_W2T,phase_W2T]=bode(omega,W2*T);
 gain_W2T_dB=20*log10(gain_W2T(:));

 W1SW2T=gain_W1S+gain_W2T;
 gain_W1SW2T_dB=20*log10(W1SW2T(:));

figure(5)
semilogx(omega,gain_W1S_dB(:,1),'b');
hold on
semilogx(omega,gain_W2T_dB(:,1),'r');
hold on
semilogx(omega,gain_W1SW2T_dB,'m');
grid on
```

ロバスト性能

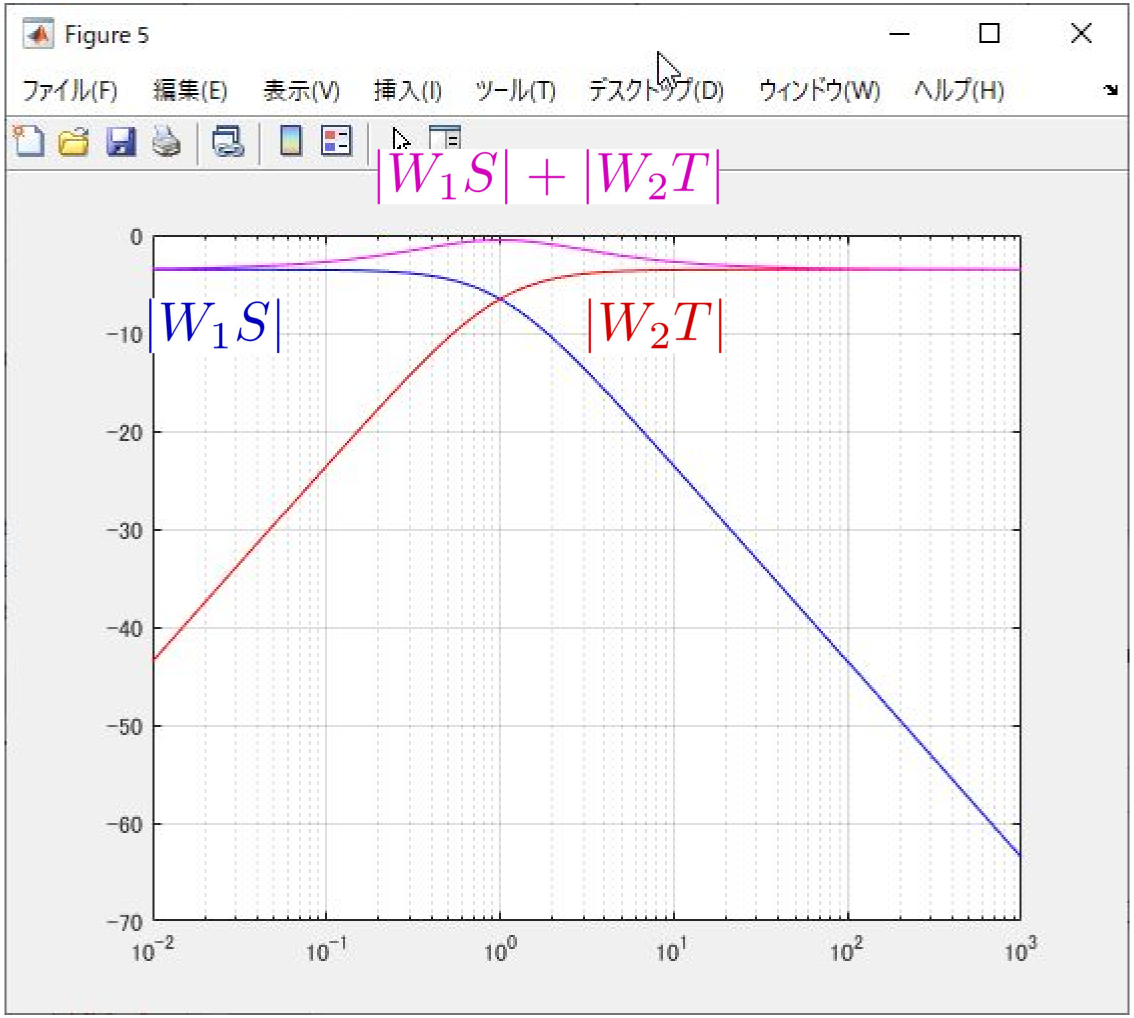
(i) ロバスト安定

(ii) $|W_1\tilde{S}| < 1,\ \ {}^\forall\omega,\ \ {}^\forall\tilde{P} \in \mathcal{P}$



ロバスト性能

$$|W_1 S| + |W_2 T| < 1, \quad {}^{\forall}\omega$$



file7_4.m

【課題1】モータ制御について，$W_1(s) = \dfrac{5}{s}$ としたとき，P制御（KP だけで，KD = 0, KI = 0)でロバスト性能を満たすKPと満たさないKPを答え，$|W_1 S|$, $|W_2 T|$, $|W_1 S| + |W_2 T|$ を描け。

```
% ------------------
KP = xxxxx;
KD = 0;
KI = 0;
% ------------------
omega=logspace(-2,3,100);

K = tf([KD KP KI],[1 0])

K_nom = 10;
T_nom = 0.0933;
P_nom = tf(K_nom,[T_nom 1 0]);
 .......
```

【課題2】モータ制御について，$W_1(s) = \frac{5}{s}$ としたとき，PI制御（KPとKIだけで，KD = 0)でロバスト性能を満たすKP, KD と満たさないKP, KDを答え, $|W_1 S|$, $|W_2 T|$, $|W_1 S| + |W_2 T|$ を描け。

```
% ------------------
KP = xxxxx;
KD = 0;
KI = xxxxx;
% ------------------
omega=logspace(-2,3,100);

K = tf([KD KP KI],[1 0])

K_nom = 10;
T_nom = 0.0933;
P_nom = tf(K_nom,[T_nom 1 0]);
 …….
```

第 7 章 :フィードバック制御系のロバスト性解析

7.3 制御性能のロバスト性

キーワード：ノミナル性能, 感度関数
ロバスト性能

学習目標：ノミナル性能，制御性能のロバスト性について理解する。