第 5 章：周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

キーワード：ベクトル軌跡

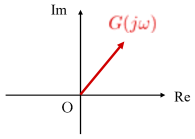
学習目標：ベクトル軌跡による表示ができるようになる。

1

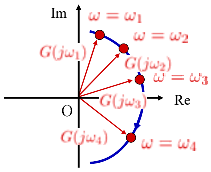
5 周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

周波数 ω を一つ定めると，$G(j\omega)$ はある複素平面上のベクトルとして表せる．



ω を $0 \sim +\infty$ と変化させると $G(j\omega)$ は軌跡を描く



ベクトル軌跡

2

積分系 $G(s) = \frac{1}{s}$

周波数伝達関数 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

ゲイン $|G(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega|} = \frac{1}{|\omega|}$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j\omega} = \angle\frac{1}{j} = \underbrace{\angle 1}_{=0} - \angle j$$
$$= -\angle j = -90^\circ$$

＋方向に位相を考える

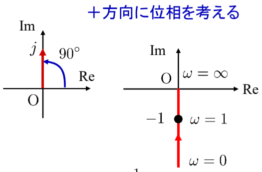


図 5.3 $G(s) = \frac{1}{s}$ のベクトル軌跡

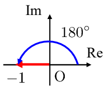
2 重積分系 $G(s) = \frac{1}{s^2}$

周波数伝達関数 $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$

ゲイン $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2}$

位相 $\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j^2} = \angle 1 - \angle j^2$
$$= 0 - \underline{\angle(-1)} = -180^\circ$$

＋方向に位相を考える



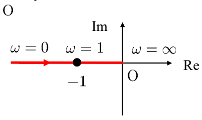


図 5.3 $G(s) = \frac{1}{s^2}$ のベクトル軌跡

3

積分系と位相遅れ

$\times\frac{1}{s}$ ： -90° 回転

90° 位相が遅れる

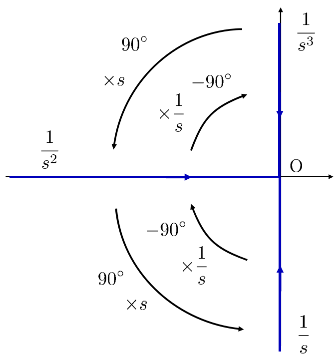
微分系と位相進み

$\times s$ ： 90° 回転

90° 位相が進む

動的システム

振幅と位相



4

1 次系 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ $(K=1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

ゲイン

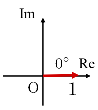
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|1+j\omega T|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{1+j\omega T} = \underbrace{\angle 1}_{=0^\circ} - \angle(1+j\omega T) = -\angle(1+j\omega T)$$

$\omega T = 0$ のとき

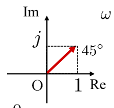
$$|G(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$
$$\angle G(0) = -\angle 1 = 0^\circ$$



5

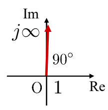
$\omega T = 1$ のとき

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j) = -45^\circ$$



$\omega T \approx \infty$ のとき

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = 0$$
$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j\infty) = -90^\circ$$



出発点 $(1, 0)$

終点 -90°

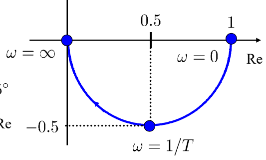


図 5.4 1 次系のベクトル軌跡

$\omega T = 0$	$\lvert G\rvert = 1$	$\angle G = 0^\circ$
$\omega T = 1$	$\lvert G\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\angle G = -45^\circ$
$\omega T \approx \infty$	$\lvert G\rvert \approx 0$	$\angle G \approx -90^\circ$

6

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{0.5(1+j\omega T)+0.5(1-j\omega T)}{1+j\omega T}$$

$$= \underline{0.5} + \underline{0.5\frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}}$$

実軸の正方向に 0.5 平行移動

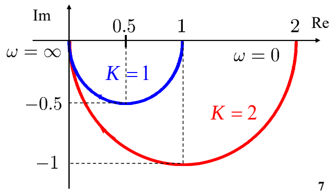
$$0.5\cdot\frac{|1-j\omega T|}{|1+j\omega T|} = 0.5, \quad \forall\omega$$

半径 0.5 の円周

中心 $(0.5, 0)$
半径 0.5 の
（半）円周上を動く

$\frac{K}{Ts+1}$ の場合

ゲイン K をかけると
原点を中心として K 倍に
拡大（縮小）される



7

2 次系 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \quad (K=1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$$
$$= \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j+1}$$
$$= \frac{1}{(j\Omega)^2+2\zeta\Omega j+1}, \quad \left(\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = -\angle\left([1-\Omega^2]+j[2\zeta\Omega]\right) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$$

8

出発点 $(1,0)$
終点 $-180°$

$\Omega=0$	$\lvert G\rvert=1$	$\angle G=(-0°)=0°$
$\Omega=1$	$\lvert G\rvert=\frac{1}{2\zeta}$	$\angle G=-90°$
$\Omega\approx\infty$	$\lvert G\rvert\approx 0$	$\angle G\approx-180°$

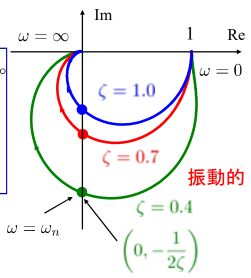
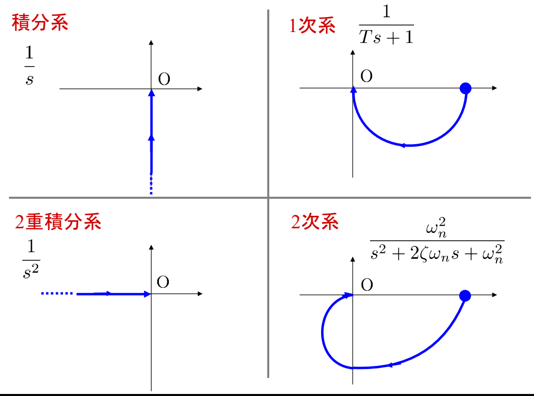


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡

9

ベクトル軌跡の出発点と終点



10

高次系 $G(s) = \frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \quad (n>m)$

出発点

ゲイン

原点 $(s=0)$ に極をもたないとき

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0} \quad (a\neq 0)$$

原点に l 位の極をもつとき

$\omega\to 0$ のとき $|G(j\omega)|\to\infty$

位相

$$\angle G(j\omega)\to\angle\frac{b_0}{(j\omega)^l} = \angle\frac{1}{j^l}\cdot\frac{b_0}{\omega^l}$$

$=$（b_0 の符号）$\times l\times(-90°)$

この方向の無限遠方から出発する

終点

ゲイン

終点 $\omega\to\infty$ のとき

$$G(j\omega) = 0 \quad (n>m)$$

位相

$$\angle G(j\omega)\approx\angle\frac{b_m}{(j\omega)^{n-m}}$$

$=$（b_m の符号）
$\times(n-m)\times(-90°)$

この方向から原点に向う

11

(例) 原点 $(s=0)$ に極をもたないとき

× $G(s)=s$　× $G(s)=\frac{1}{s}$

○ $G(s)=\frac{1}{s+1}$

(例) 原点に l 位の極をもつとき

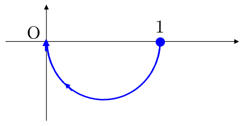
× $G(s)=s$　○ $G(s)=\frac{1}{s}$

× $G(s)=\frac{1}{s+1}$　○ $G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$

12

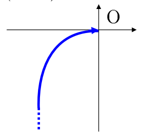
原点($s=0$)に極をもたないとき

$$G(s)=\frac{1}{s+1} \quad (n-m=1,\ l=0)$$



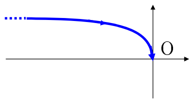
原点に1位の極をもつとき

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)} \quad (n-m=2,\ l=1)$$



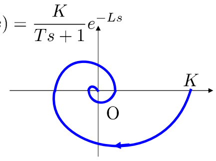
原点に2位の極をもつとき

$$G(s)=\frac{1}{s^2(s+1)} \quad (n-m=3,\ l=2)$$



むだ時間を含む系

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}e^{-Ls}$$



13

第 5 章 : 周波数応答

5.2 ベクトル軌跡

キーワード : ベクトル軌跡

学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができるようになる。

14