第 5 章 :周波数応答

5.3 ボード線図

キーワード：ボード線図，ゲイン曲線
位相曲線

学習目標 :ボード線図を用いて周波数特性を図式的に
表すことができるようになる。

5 周波数応答
5.3 ボード線図

周波数 ω に対し $\begin{cases} |G(j\omega)| & \text{の変化を表すゲイン曲線} \\ \angle G(j\omega) & \text{の変化を表す位相曲線} \end{cases}$

横軸：周波数 ω を対数目盛り $\omega_2 = 10\omega_1$ 　1 デカード（dec）

縦軸：ゲイン曲線 $20\log_{10}|G(j\omega)|$ 　デシベル値（dB）

　　位相曲線 $(^\circ)$ 度

絶対値	0.1	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
デシベル値	-20 dB	0 dB	3 dB	6 dB	20 dB	40 dB

積分系 $G(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$

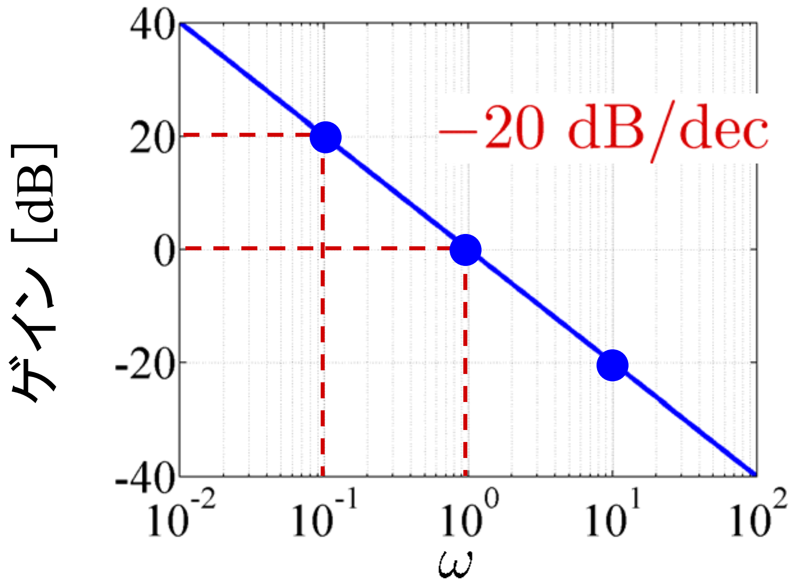
ゲイン（デシベル値）

$$
\begin{aligned}
20\log|G(j\omega)| &= 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| \\
&= 20\log\frac{1}{|\omega|} = -20\log|\omega|
\end{aligned}
$$

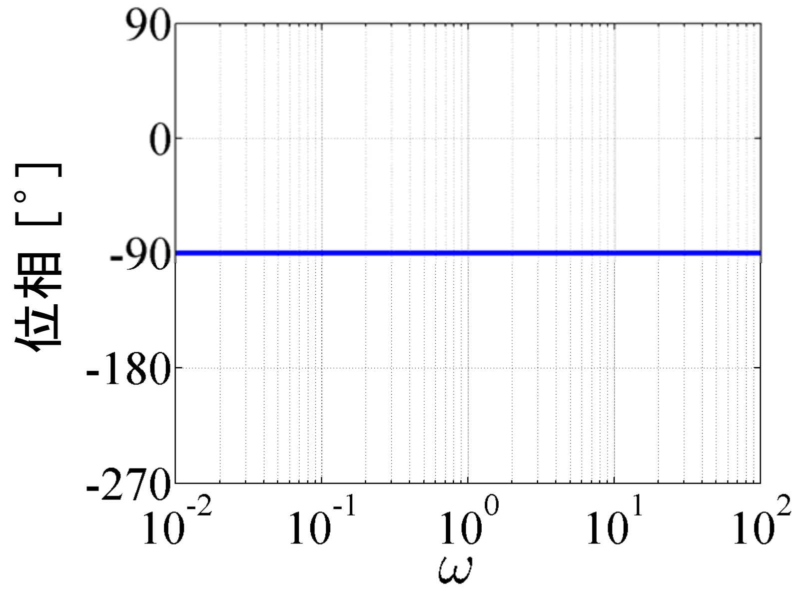
$$
\left\{
\begin{aligned}
&\omega = 0.1 \\
&-20\log 0.1 = -20\times(-1) = 20\ \mathrm{dB} \\
&\omega = 1 \\
&-20\log 1 = -20\times 0 = 0\ \mathrm{dB} \\
&\omega = 10 \\
&-20\log 10 = -20\times 1 = -20\ \mathrm{dB}
\end{aligned}
\right.
$$

位相

$$
\begin{aligned}
\angle G(j\omega) &= \angle\frac{1}{j\omega} = \angle\frac{1}{j} = \angle 1 - \angle j \\
&= 0 - 90 = -90^\circ
\end{aligned}
$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

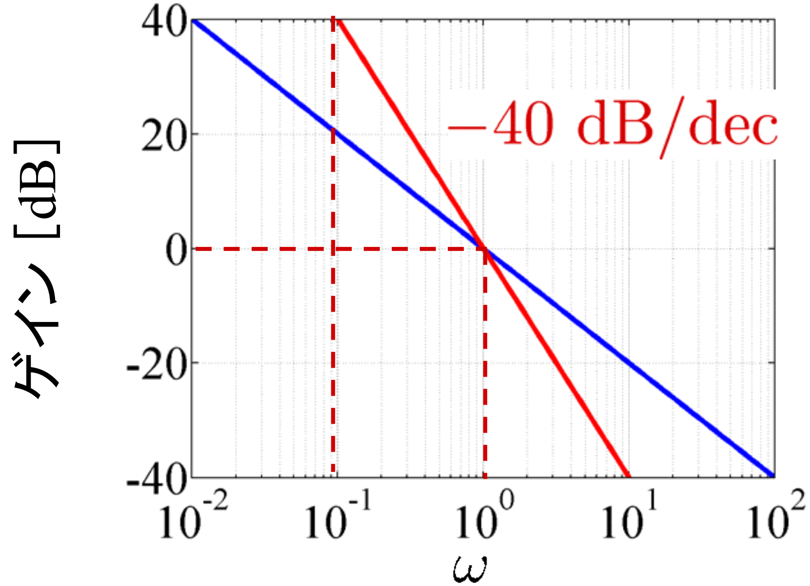
2 重積分系 $G(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2}$

ゲイン（デシベル値）

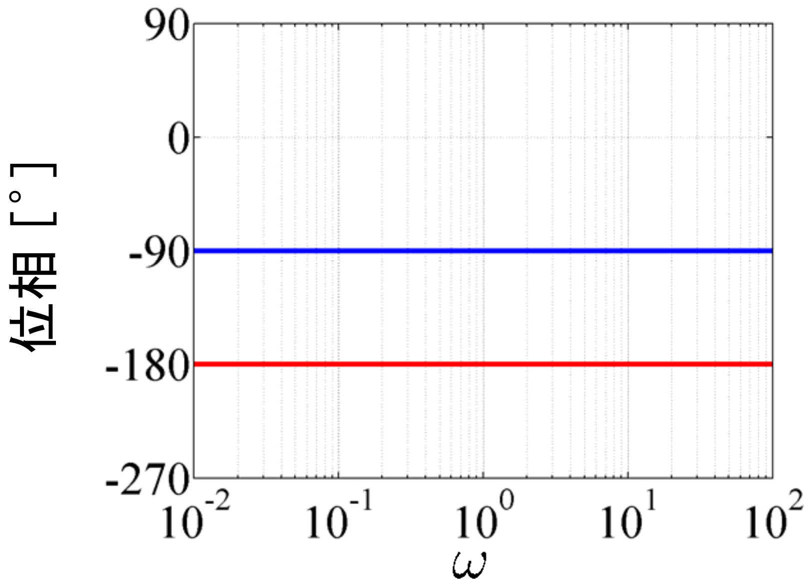
$$20\log\frac{1}{|(j\omega)^2|} = 20\log\frac{1}{\omega^2}$$
$$= 20\log\omega^{-2} = -40\log|\omega|$$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j^2} = \angle 1 - \angle j^2$$
$$= 0 - 180 = -180^\circ$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

図 5. 6 積分系のボード線図

1 次系 $G(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega T}$

ゲイン（デシベル値）

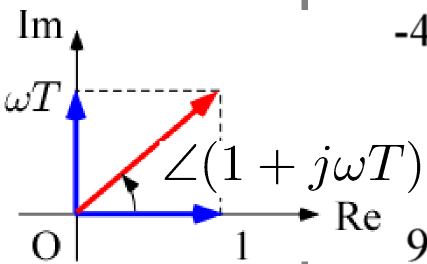
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

位相

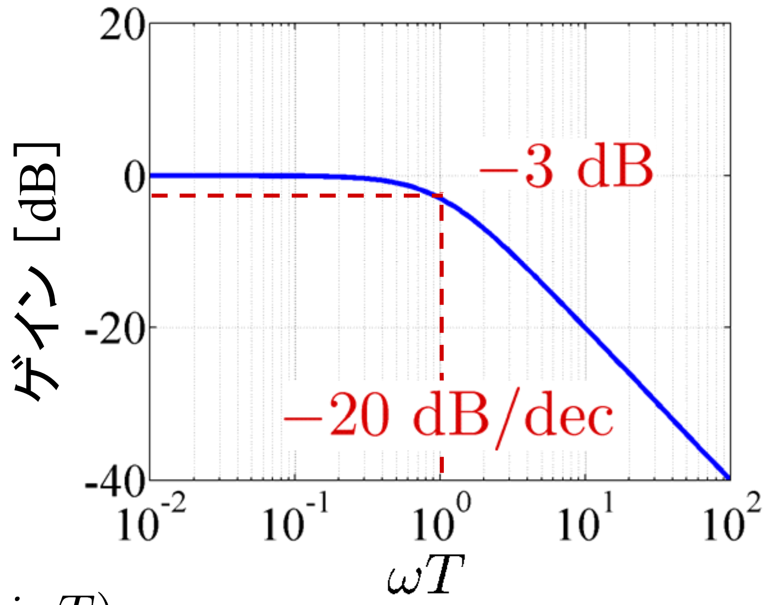
$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle(1 + j\omega T)$$
$$= -\angle(1 + j\omega T)$$

$$\omega T \ll 1 \qquad G(j\omega) \approx 1$$

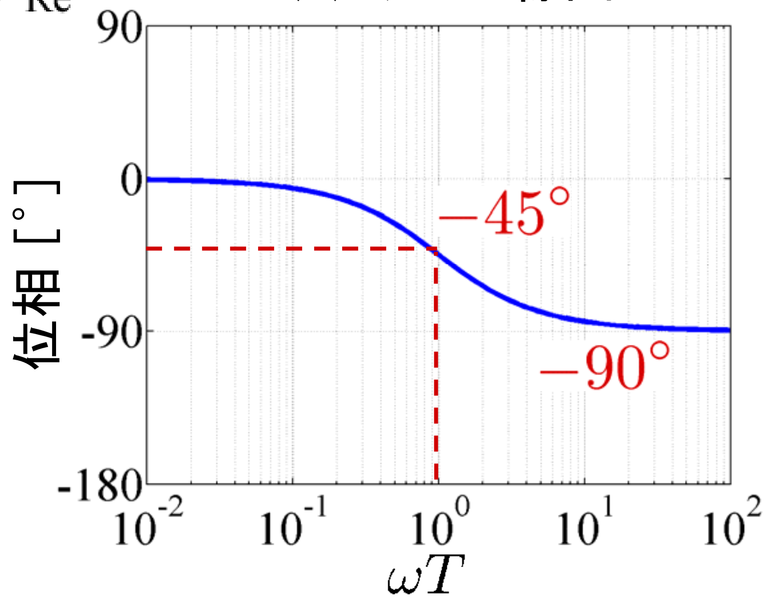
$$\omega T \gg 1 \qquad G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega T}$$



$$\begin{cases} \omega T \ll 1 & 20\log|G| \approx 20\log 1 = 0\ \mathrm{dB} \\ & \angle G = 0^\circ \\ \omega T = 1 & 20\log|G| = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -3\ \mathrm{dB} \\ & \angle G = -45^\circ \\ \omega T \gg 1 & 20\log|G| \approx -20\log|\omega T|\ \mathrm{dB} \\ & \angle G \approx -90^\circ \end{cases}$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

図 5. 7 1 次系のボード線図

折れ線近似

（ゲイン）0 dB と –20 dB/dec
の 2 本の直線

（位相）

$$\omega \leq \frac{0.2}{T} \quad で \quad 0^\circ$$

$$\omega \geq \frac{5}{T} \quad で \quad -90^\circ$$

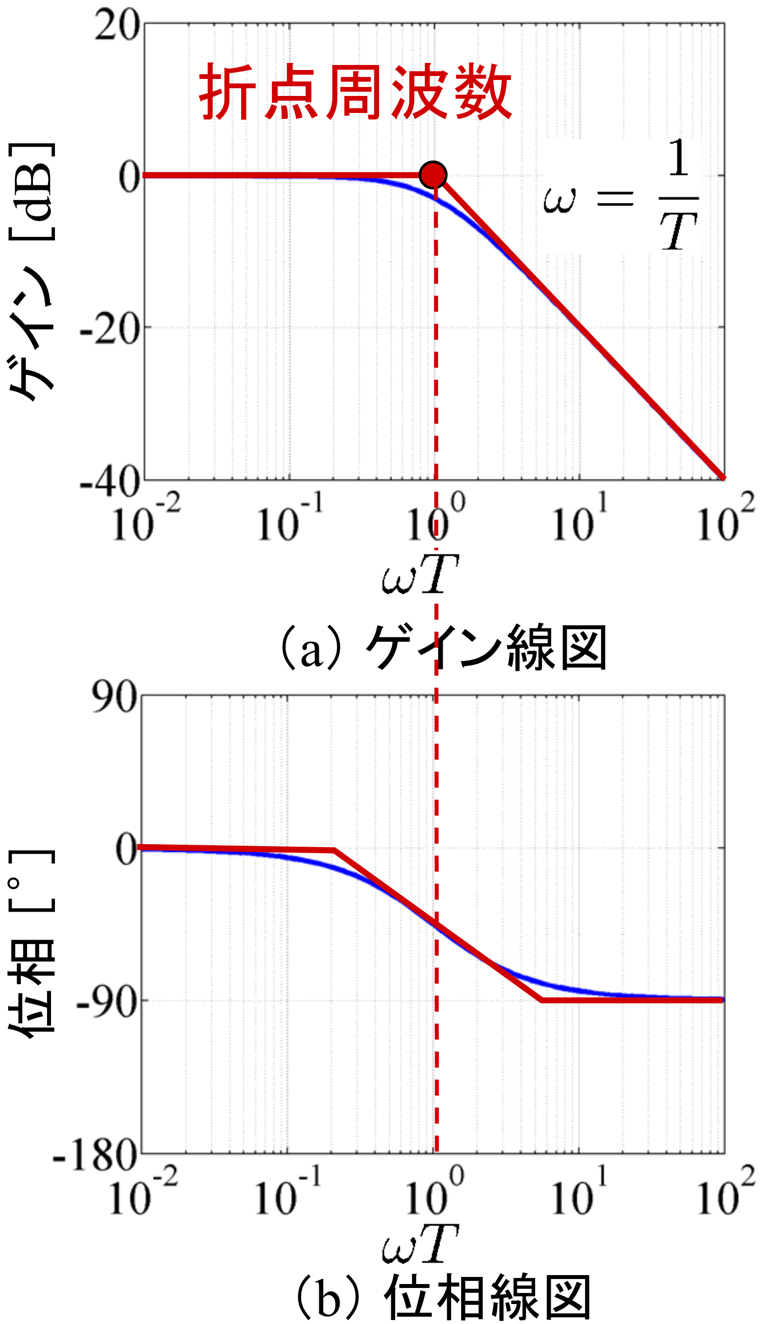
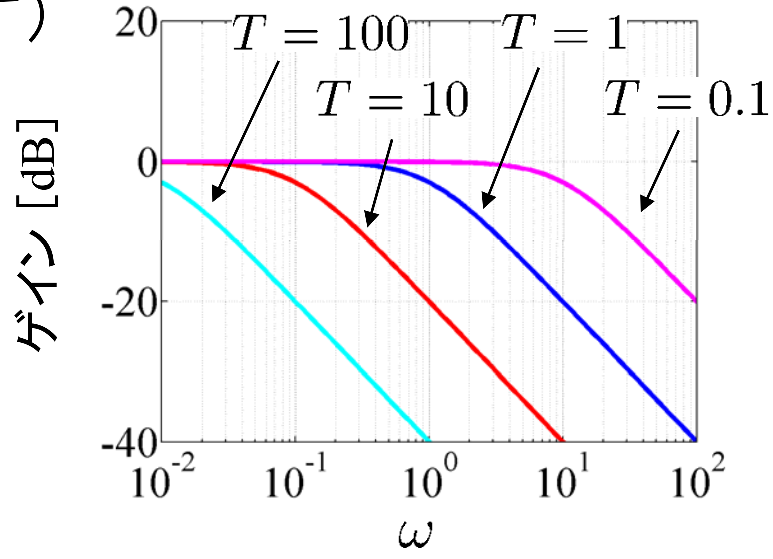
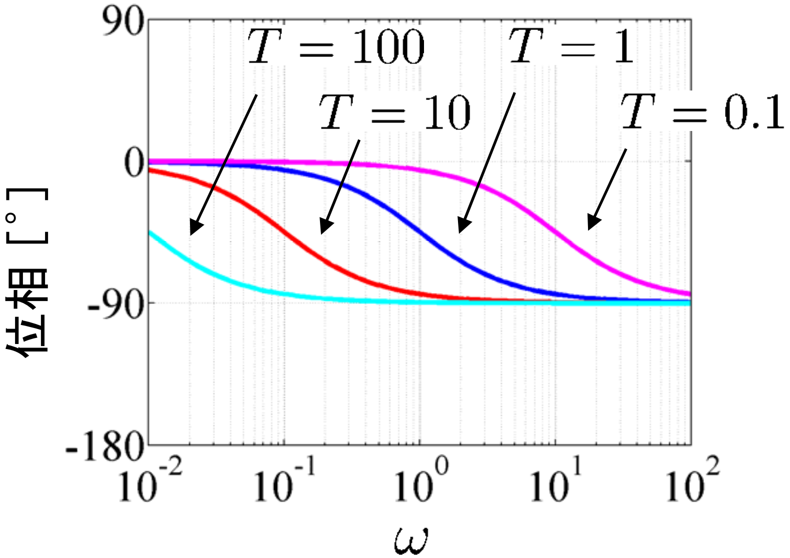


図 5. 7 1 次系のボード線図

T が変化しても（形を変えず）
横軸方向に平行移動



(a) ゲイン線図

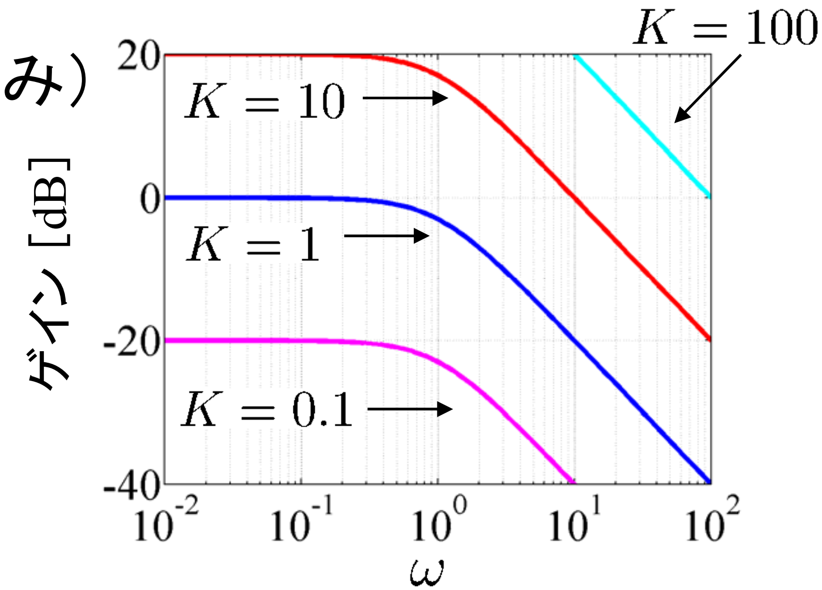


(b) 位相線図

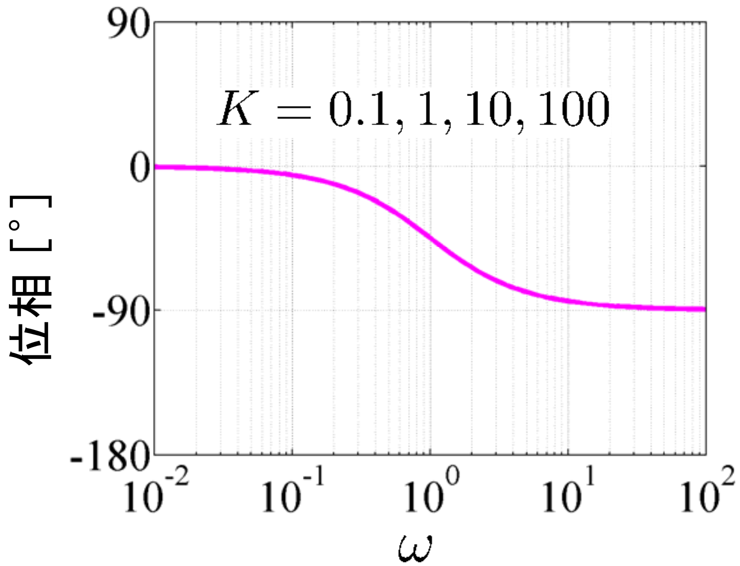
図 5.8 種々の時定数に対する 1 次系のボード線図

ゲイン K 倍しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \quad (T = 1)$$



（a）ゲイン線図



（b）位相線図

2 次系 $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (K = 1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}j + 1}$$

$$= \frac{1}{(j\Omega)^2 + 2\zeta\Omega j + 1} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega} \qquad \left(\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = -\angle\left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)$$

2 次系 $G(j\omega) = \dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$

$$= \frac{1}{1-\Omega^2 + j2\zeta\Omega}$$

ゲイン（デシベル値）

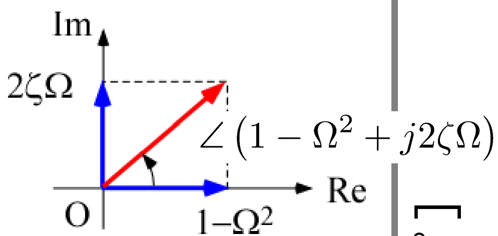
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

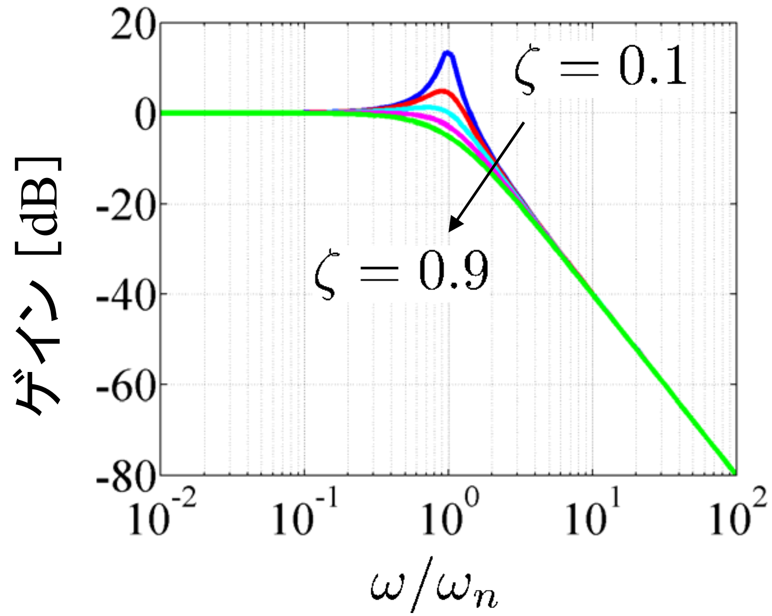
$$\angle G(j\omega) = -\angle\left(1-\Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)$$

$$\Omega \ll 1 \quad G(j\omega) \approx 1$$

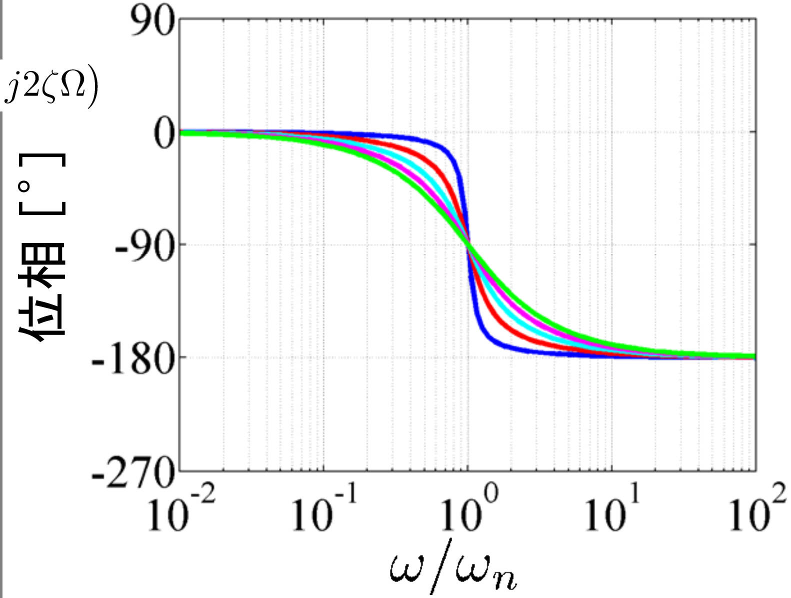
$$\Omega \gg 1 \quad G(j\omega) \approx \frac{1}{-\Omega^2}$$



$$\begin{cases} \Omega \ll 1 & 20\log|G| = 20\log 1 \approx 0\ \mathrm{dB} \\ & \angle G \approx 0^\circ \\ \Omega = 1 & 20\log|G| = 20\log\left|\dfrac{1}{2\zeta}\right|\ \mathrm{dB} \\ & \angle G = -90^\circ \\ \Omega \gg 1 & 20\log|G| \approx -40\log|\Omega|\ \mathrm{dB} \\ & \angle G \approx -180^\circ \end{cases}$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

$$\Omega = 0 \quad |G| = 1 \quad \angle G = (-0^\circ) = 0^\circ$$

$$\Omega = 1 \quad |G| = \frac{1}{2\zeta} \quad \angle G = -90^\circ$$

$$\Omega \approx \infty \quad |G| \approx 0 \quad \angle G \approx -180^\circ$$

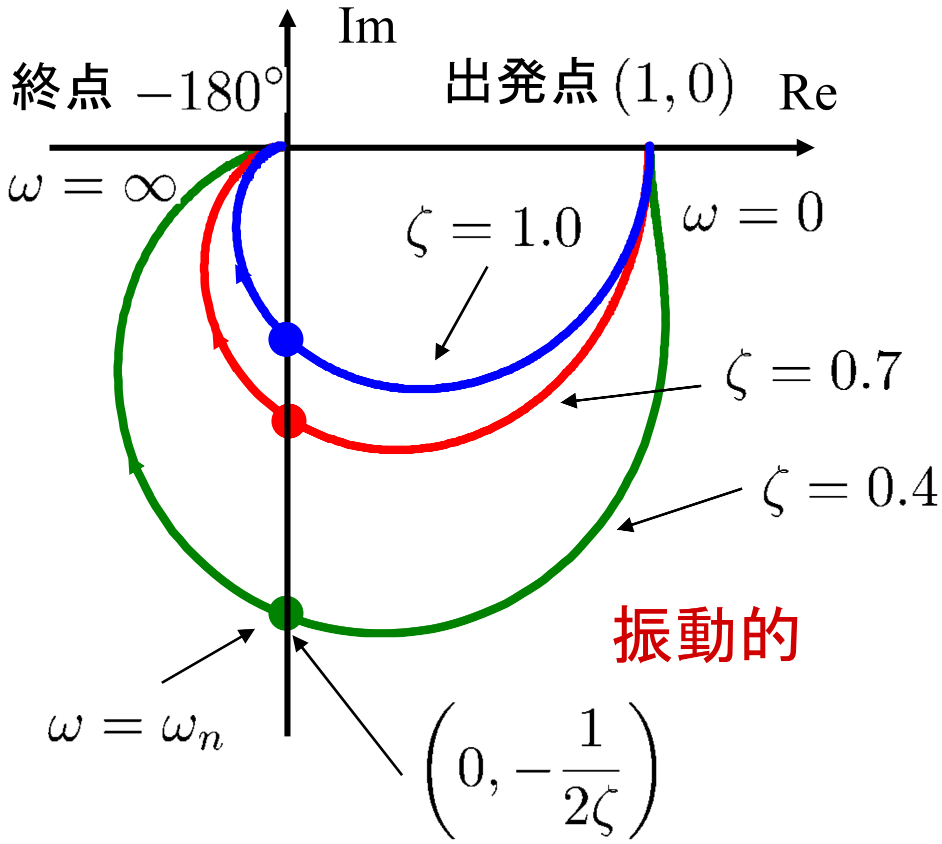
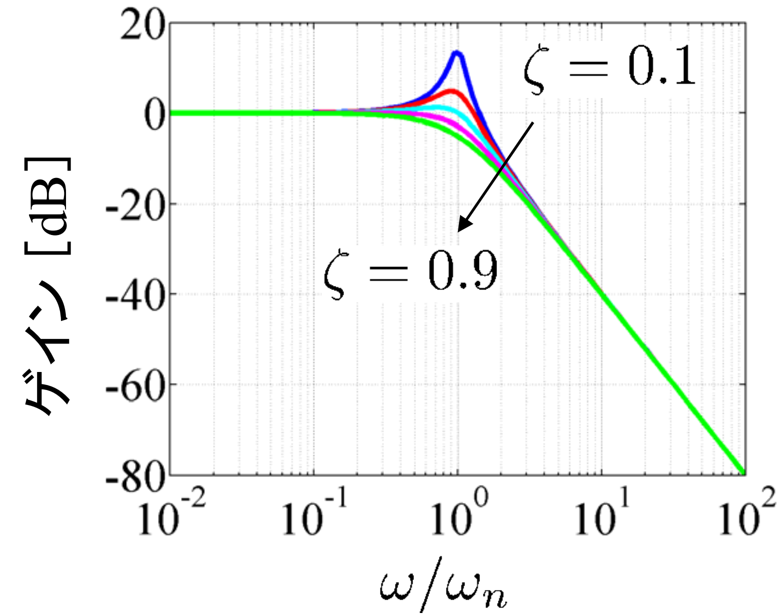
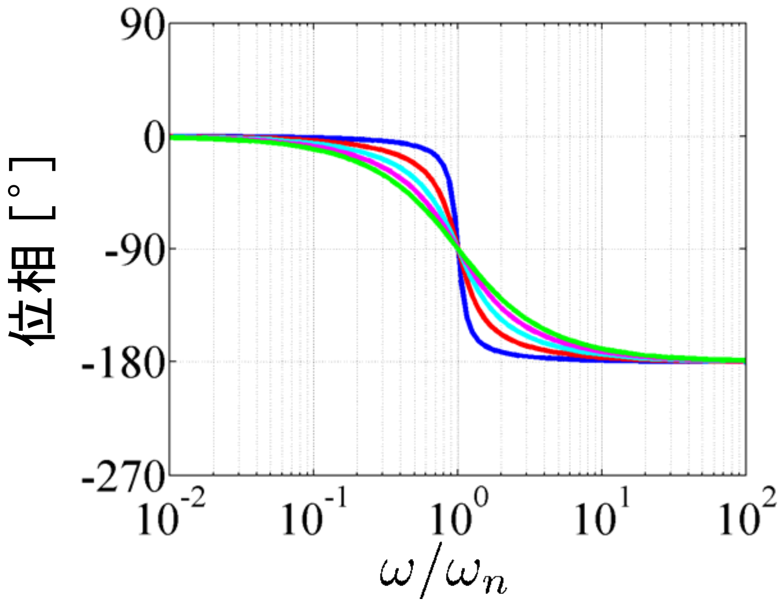


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡



（a）ゲイン線図



（b）位相線図

$G^{-1}(s)$（逆システム）のボード線図

ゲイン

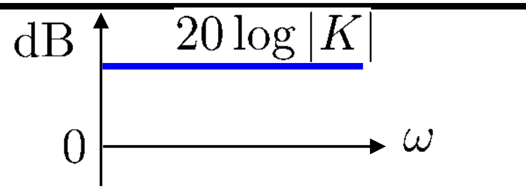
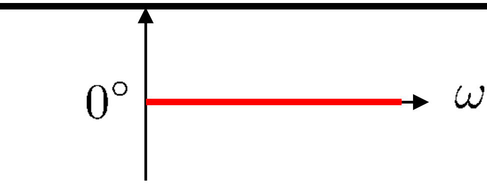
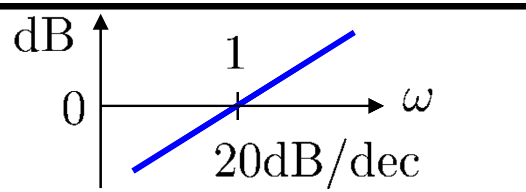
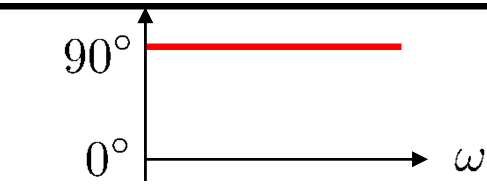
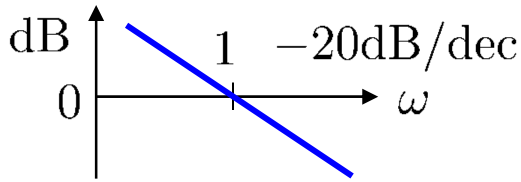
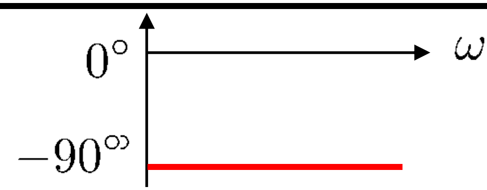
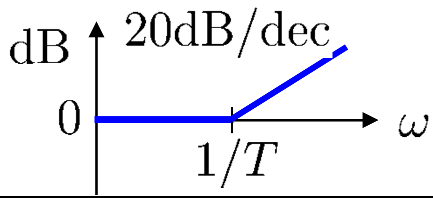
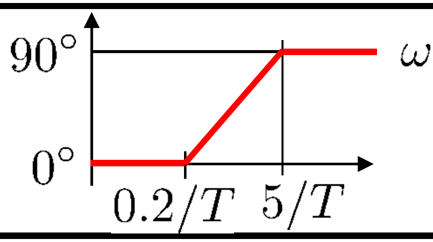
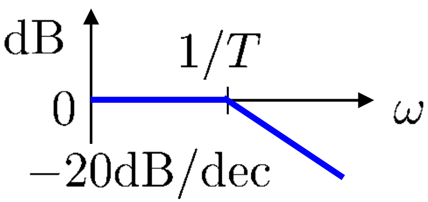
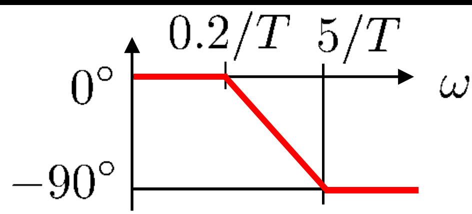
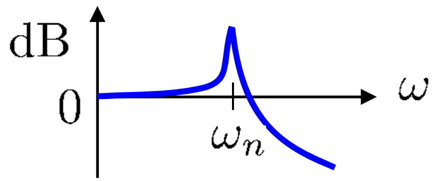
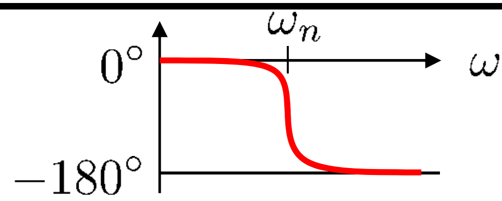
$$20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| = -20\log|G(j\omega)|$$

位相

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

逆システムでは，ゲインと位相の符号を反転

表 5.1　基本要素のボード線図

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K		
s		
$\frac{1}{s}$		
$Ts+1$		
$\frac{1}{Ts+1}$		
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$		

第 5 章 :周波数応答

5.3 ボード線図

キーワード：ボード線図, ゲイン曲線
位相曲線

学習目標 :ボード線図を用いて周波数特性を図式的に
表すことができるようになる。