

第6章：フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード： **ナイキストの安定判別法**

学習目標： **ナイキストの安定判別法を理解し、フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる。**

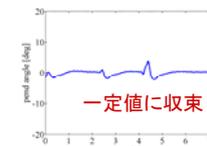
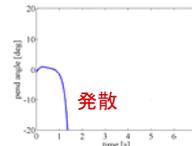
1

6 フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

安定とは **一定値に落ち着く**

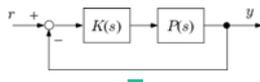
【例】倒立振り子システム



2

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$K(s) = 30$$



極の実部が負  
閉ループ系

$$G(s) = \frac{y}{r} = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)+30}$$

= 0 の解  
(短所) 計算に手間がかかる

ラウス=フルビッツの安定判別法

$$G(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)+30}$$

すべての係数が正  
ラウス数列, またはフルビッツの行列式が正  
(短所) 次数が高いと手間がかかる

3

内部安定性

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$$

$$K(s) = 30 = \frac{30}{1} = \frac{N_K(s)}{N_P(s)}$$

$$\phi(s) = D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

$$= (s+1)(s+2)(s+3)+30$$

= 0 の解

(長所) 閉ループ  $G(s) = \frac{y}{r} = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$  を計算しなくてよい

(短所) 計算に手間がかかる

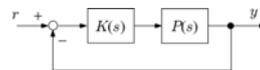
ナイキストの安定判別法

閉ループ伝達関数の周波数応答に基づき図的に判別する

4

ナイキストの安定判別法

[1] 目的



内部安定性

$$1 + P(s)K(s) = 1 + \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \cdot \frac{N_K(s)}{D_K(s)} = \frac{D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)}{D_P(s)D_K(s)}$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2) \cdots (s-r_n)}{(s-p_1)(s-p_2) \cdots (s-p_n)}$$

(閉ループ系の極)  
(開ループ系の極)

位相

$$\angle(1 + P(s)K(s)) = \angle(s-r_1) + \cdots + \angle(s-r_n)$$

$$- (\angle(s-p_1) + \cdots + \angle(s-p_n))$$

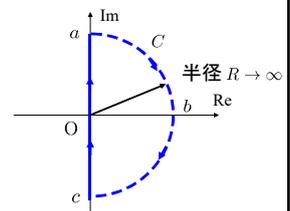
5

sを  $0 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow 0$

と時計方向に1回転

$s = 0, j, j10, j\infty$

$-j\infty, -j100, -j10, -j, 0$



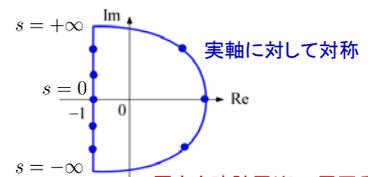
【例1】不安定(正)の極

$$P(s) = s - 1$$

$$P(0) = -1$$

$$P(j) = j - 1$$

$$P(j10) = j10 - 1$$



原点を時計周りに1周回る

6

**【例2】安定(負)の極**

$P(s) = s + 1$   
 $P(0) = 1$   
 $P(j) = j + 1$   
 $P(j10) = j10 + 1$

原点を時計周りに回っていない

原点を時計周りに回ると不安定な極がある

よって

$$\angle(1 + P(s)K(s)) = \angle(s - r_1) + \dots + \angle(s - r_n)$$

$N$ 回まわる       $Z$ 回まわる

(図から調べる)       $-\angle(s - p_1) + \dots + \angle(s - p_n)$

$\Pi$ 回まわる

$N = Z - \Pi$

7

$Z = N + \Pi$

$Z = 0$  ならば安定

$D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$  に不安定極がない

$Z \neq 0$  ならば不安定

$\angle(1 + P(s)K(s))$  の回る回数の求め方

$P(s)K(s)$  が  $(-1, 0)$  を回る

$1 + P(s)K(s)$  が原点を回る

8

ナイキストの安定判別法

[ステップ 1] ベクトル軌跡  $P(j\omega)K(j\omega)$  を描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡  $\Gamma$  を得る。

[ステップ 2] ナイキスト軌跡  $\Gamma$  が点  $(-1, 0)$  のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを  $N$  とする。  
時計方向は+, 反時計方向は-とする。

[ステップ 3]  $P(s)K(s)$  の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを  $\Pi$  とする。

[ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は  $Z = N + \Pi$  となる。  
したがって、 $Z = 0$  ならばフィードバック制御系は安定。  
 $Z \neq 0$  ならば系は不安定である。

9

[例 6.2]

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad K(s) = 30$$

[ステップ 1]

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{30}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{2+\omega^2}\sqrt{3+\omega^2}}$$

$\omega = 0, |L(0)| = \frac{30}{1 \times 2 \times 3} = \frac{30}{6} = 5$

$$\angle L(0) = \angle 30 - \angle 3 = 0 - 0 = 0$$

$\omega \rightarrow \infty, |L(\infty)| = \frac{30}{\infty} = 0$

$$\angle L(\infty) = \angle 30 - \angle j^3 = 0 - (270) = -270^\circ$$

10

$$L(j\omega) = \frac{30}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$= \frac{30}{6 - 6\omega^2 + j\omega(-\omega^2 + 11)}$$

$\omega = 0, \pm\sqrt{11}$

$\omega = \sqrt{11}$  のとき

$$L(j\sqrt{11}) = \frac{30}{6 - 6 \times 11} > -1$$

[ステップ 2]  $N = 0$   
回っていない

[ステップ 3]  $\Pi = 0$   
極:  $-1, -2, -3$

[ステップ 4]  $Z = N + \Pi = 0$   
閉ループ系の制御系は安定

11

[例 6.3] (不安定系の場合)

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = 2$$

[ステップ 1]

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{2}{s-1}$$

$\omega = 0, |L(0)| = \left| \frac{2}{0-1} \right| = 2$

$$\angle L(0) = \angle 2 - \angle -1 = 0 - (180) = -180^\circ$$

$\omega \rightarrow \infty, |L(\infty)| = \left| \frac{2}{j\infty-1} \right| = \frac{2}{\infty} = 0$

$$\angle L(\infty) = \angle 2 - \angle j = 0 - (90) = -90^\circ$$

[ステップ 2]  $N = -1$  反時計回方向に1回転

[ステップ 3]  $\Pi = 1$  極: 1

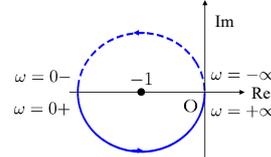
[ステップ 4]  $Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$  安定

12

**[例 6.3] (不安定系の場合)**

$$L(s) = \frac{K}{s-1} \quad K = 2, \frac{3}{4}$$

**[ステップ 1]** (a)  $K = 2$

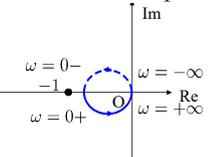


**[ステップ 2]**  $N = -1$

**[ステップ 3]**  $\Pi = 1$

**[ステップ 4]**  $Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$   
**安定**

(b)  $K = \frac{3}{4}$



**[ステップ 2]**  $N = 0$

**[ステップ 3]**  $\Pi = 1$

**[ステップ 4]**  $Z = N + \Pi = 0 + 1 = 1 \neq 0$   
**不安定**

13

**第 6 章 : フィードバック制御系の安定性**

6.2 ナイキストの安定判別法

**キーワード :** ナイキストの安定判別法

**学習目標 :** ナイキストの安定判別法を理解し、フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる。

14