

2019年度 制御工学 II 後期 第7回講義資料 演習問題 (模範解答)

5年 E科 番号 _____ 氏名 _____

[問題 1](7章演習問題 【5】)

ノミナルモデルが $P(s) = 1/s$, コントローラが $K = 1$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (a) 不確かさの重み関数が $W_2(s) = s/1.5$ のとき, $|W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1, \forall \omega$ のロバスト安定条件を調べよ.
- (b) 制御性能の重み関数が $W_1(s) = 1/1.5s$ のとき, $|W_1(j\omega)S(j\omega)| < 1, \forall \omega$ のノミナル性能条件を調べよ.
- (c) 上の (a), (b) で与えられた重み関数 $W_1(s), W_2(s)$ に対し, $|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1, \forall \omega$ のロバスト性能条件を調べよ.

[解答]

- (a) ノミナルモデル $P(s) = 1/s$, コントローラ $K = 1$ より相補感度関数は

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\frac{1}{s} \cdot 1}{1 + \frac{1}{s} \cdot 1} = \frac{1}{s+1} \quad (1)$$

であるので,

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| = \left| \frac{j\omega}{1.5} \frac{1}{j\omega+1} \right| = \frac{\omega}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} < 1 \quad (2)$$

となる. よって,

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad (3)$$

であるので, ロバスト安定である.

- (b) ノミナルモデル $P(s) = 1/s$, コントローラ $K = 1$ より感度関数は

$$S(s) = \frac{1}{1 + PK} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \cdot 1} = \frac{s}{s+1} \quad (4)$$

であるので,

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)S(j\omega)| &= \left| \frac{1}{1.5j\omega} \frac{j\omega}{1+j\omega} \right| = \left| \frac{1}{1.5(j\omega+1)} \right| \\ &= \frac{1}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} \end{aligned} \quad (5)$$

となる. よって

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| < 1 \quad (6)$$

であるので, ノミナル性能条件を満たす.

- (c) (a), (b) より

$$\begin{aligned} &|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| \\ &= \frac{1}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} + \frac{\omega}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{\omega+1}{1.5\sqrt{\omega^2+1}} \end{aligned} \quad (7)$$

である. これを ω について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega+1}{\sqrt{\omega^2+1}} \right) &= \frac{d}{d\omega} (\omega+1)(\omega^2+1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\omega^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (\omega+1) \left(-\frac{1}{2} \right) 2\omega(\omega^2+1)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{-\omega(\omega+1)}{(\omega^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\omega^2+1}{(\omega^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-\omega(\omega+1)}{(\omega^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \frac{1-\omega}{\omega^2+1} \end{aligned} \quad (8)$$

となるので, (7) 式は $\omega < 1$ で増加し, $\omega > 1$ で減少する. よって, (7) 式は $\omega = 1$ で最大となることがわかる. $\omega = 1$ を (7) 式に代入すると

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$$

となるので, ロバスト性能条件を満たす. 次の図1に $|W_1S|$ を一点鎖線で, $|W_2T|$ を破線で, $|W_1S| + |W_2T|$ を実線でそれぞれ示す.

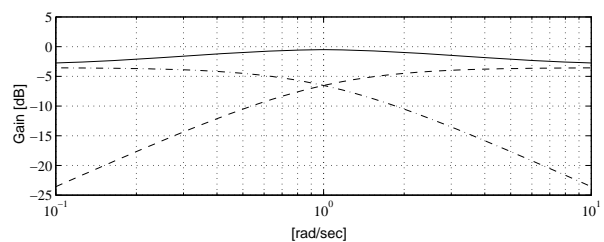


図 1: $|W_1S|, |W_2T|, |W_1S| + |W_2T|$ の周波数特性