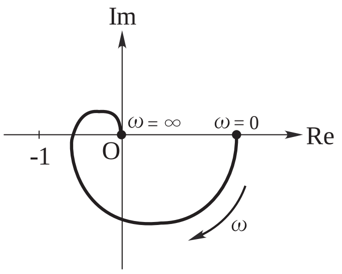
2019 年度 制御工学 II 前期 第 8 回レポート (模範解答)

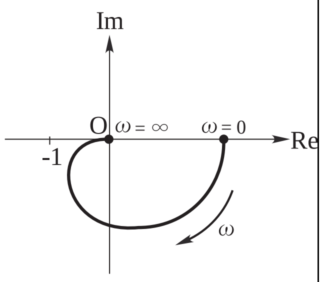
5 年 E 科 番号 ________ 氏名 ________________________

[問題 1]

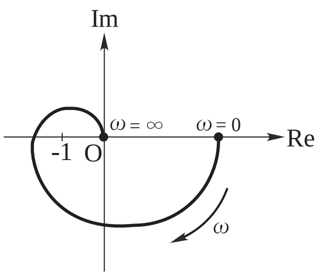
以下の図に示すナイキスト線図を持つ制御系が安定であるかどうかを簡単化されたナイキストの安定判別法を用いて判別せよ。ただし，Π は右半平面にある極の数を表している。



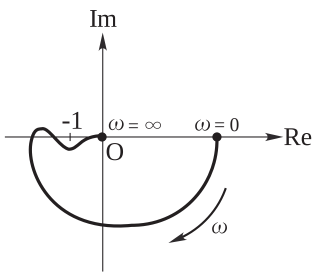
(a) $(\Pi = 0)$



(b) $(\Pi = 0)$



(c) $(\Pi = 0)$



(d) $(\Pi = 0)$

(解答)

(ステップ 1)

問題より, いずれも右半平面には極がないので, (a)〜(d) とも極の実部に正となるもはない。

(ステップ 2)

ベクトル軌跡は問題に与えられている。

(ステップ 3)

(b)〜(d) についてそれぞれ, ベクトル軌跡が点 (-1,0) をどちらに見ているか調べる。

(a) 点 (-1,0) を常に左に見えるように動く.
(b) 点 (-1,0) を常に左に見えるように動く.
(c) 点 (-1,0) を右に見るように動く。
(d) 点 (-1,0) を常に左に見えるように動く。

以上により,(a):安定, (b):安定, (c):不安定, (d):安定 となる。

[問題 2] 開ループ伝達関数 $L(s)$ が以下のように与えられるとき，ベクトル軌跡の概形を描き，フィードバック制御系が安定となるゲイン K の範囲を求めよ。ただし，$T_i > 0$，$i = 1〜2$，$K > 0$ とする。

$$L(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{1}$$

(解答) ω が 0, ∞ のときの $L(s)$ のゲインと位相を求め, ベクトル軌跡を描く。$L(s)$ の周波数伝達関数は

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)} \\ &= \frac{K}{-\omega^2(T_1 + T_2) + j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2)} \end{aligned} \tag{2}$$

より, ゲインは

$$|L(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2(T_1 + T_2))^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2}} \tag{3}$$

で与えられる。よって, ω が 0, ∞ のときの $L(s)$ のゲインは

$$|L(0)| = \infty \qquad |L(\infty)| = 0 \tag{4}$$

となる。また, 位相は $\omega \approx 0$, $\omega \approx \infty$ において

$$L(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega} \quad (\omega \approx 0) \tag{5}$$

$$L(j\omega) \approx \frac{K}{T_1 T_2 (j\omega)^3} \quad (\omega \approx \infty), \tag{6}$$

と近似できることから, 位相はそれぞれ

$$\angle L(0) = \angle\frac{1}{j} = -90^\circ \qquad \angle L(\infty) = \angle\frac{1}{(j)^3} = -270^\circ \tag{7}$$

となる。また，(2) 式から

$$L(j\omega) = \frac{K(-\omega^2(T_1 + T_2) - j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2))}{\omega^4(T_1 + T_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2} \tag{8}$$

となるから，その実部は

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[L(j\omega)] &= \frac{-K\omega^2(T_1 + T_2)}{\omega^4(T_1 + T_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2} \\ &= \frac{-K(T_1 + T_2)}{\omega^2(T_1 + T_2)^2 + (1 - \omega^2 T_1 T_2)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。$\omega = 0$ では,

$$\mathrm{Re}[L(j\omega)] = -K(T_1 + T_2) \tag{10}$$

となる。よって, ベクトル軌跡の概形は 図 1 のようになる。

次にゲイン K の範囲を求める。ベクトル軌跡が実軸と交わる位相交差周波数 ω_{pc} は $\mathrm{Im}[L(j\omega)] = 0$ が成立することから

$$\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2)K = 0 \quad より \quad \omega_{pc} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \tag{11}$$

となる。このとき $\mathrm{Re}[L(j\omega_{pc})]$ は

$$\mathrm{Re}[L(j\omega_{pc})] = \frac{K}{-\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} + j\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}(1-1)} = -\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2} \quad (12)$$

となる。安定となるためには, この点が $(-1, 0)$ を越えなければよいので

$$-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2} > -1 \quad \text{つまり} \quad \underline{K < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}} \quad (13)$$

を満たせばよい。

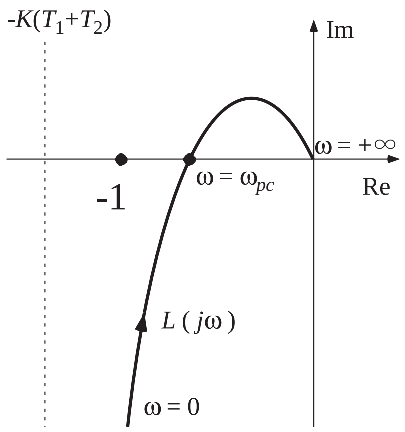


図 1: ベクトル軌跡