第 5 章 : 周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード : 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

学習目標 : システムの周波数応答特性を理解する。

1

5 周波数応答
5.1 周波数応答と伝達関数

線形システム(安定な LTI システム)

(一定周波数の)正弦波を入力として加え続けると, 定常状態ではその出力も入力と同じ周波数の正弦波になる.

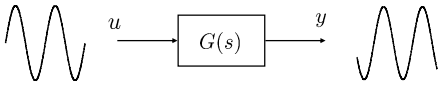
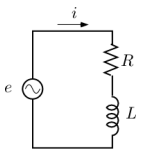


図 5.1 周波数応答

2

[例] RL直列回路

$$I = \frac{E}{R + j\omega L} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\angle\theta} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\angle -\theta$$

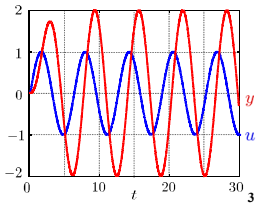


(出力)電流 i は, (入力)電圧 e に対して

振幅 $\frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ だけ増幅され

位相 $\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$ だけ遅れる

入力と出力は同じ周波数, 異なるのは振幅と位相だけ



3

周波数特性

入力の周波数を変化させた($\omega : 0 \sim \infty$)とき振幅と位相がどのように変化するか

伝達関数 $G(s)$

極 $p_i (i = 1 \sim n)$は安定 $(\mathrm{Re}[p_i] < 0)$ で, すべて異なる。

(例)安定と不安定

$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}$ $\quad p_i = 1 \pm j2 \quad \mathrm{Re}[p_i] = 1$ 不安定

$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$ $\quad p_i = -1 + j2 \quad \mathrm{Re}[p_i] = -1$ 安定

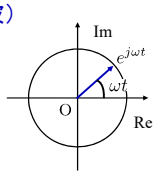
4

(仮想的な)複素数の入力 (複素正弦波)

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$\left(\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}\right) \quad \text{(p. 192 参照)}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s - j\omega}$$



出力

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s - j\omega}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s - p_i}\right]$$

$$= K_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t}$$

$G(s)$ の安定性 $(\mathrm{Re}[p_i] < 0)$ より $e^{p_i t} \to 0 \quad (t \to \infty)$

5

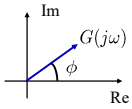
$$Y(s) = \sum_i \frac{Y_i}{s - \alpha_i} \qquad Y_i = \lim_{s \to \alpha_i}(s - \alpha_i)Y(s) \text{ (留数)}$$

よって

$$K_0 = \lim_{s \to j\omega}(s - j\omega)\left[G(s)\frac{1}{s - j\omega}\right]$$

$$= G(j\omega)$$

$$= |G(j\omega)|e^{j\phi} \qquad \phi = \angle G(j\omega)$$



上記の留数は, 実数で考える部分分数展開の係数と同じ

(例) $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$

$$K_1 = (s+1)G(s)|_{s=-1} = \frac{1}{-1+2} = 1$$

$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$ の計算は, 極座標表示した

(例) $G(j\omega) = 1 + j\sqrt{3} = 2\angle 60^\circ$

6

$$y(t) = \underbrace{K_0}_{G(j\omega)} e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} K_i \underbrace{e^{p_i t}}_{e^{p_i t} \to 0}$$

$$y(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$$
$$= |G(j\omega)|e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}$$
$$= |G(j\omega)|e^{j(\omega t+\phi)}$$

入力	出力
$\cos\omega t$	$\lvert G(j\omega)\rvert\cos(\omega t+\phi)$
$\sin\omega t$	$\lvert G(j\omega)\rvert\sin(\omega t+\phi)$

$$y(t) = |G(j\omega)|\cos(\omega t+\phi) + j|G(j\omega)|\sin(\omega t+\phi)$$

振幅の変化 $|G(j\omega)|$　ゲイン

位相の差 $\angle G(j\omega)$　位相（位相差）

7

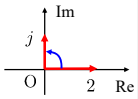
［例］ $G(s) = \dfrac{2}{s^2+s+1}$, $u(t) = \sin t$ $(\omega = 1)$

ゲイン

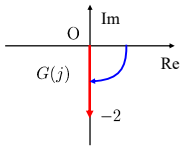
$$|G(j)| = \left|\frac{2}{j^2+j+1}\right| = \left|\frac{2}{-1+j+1}\right| = \left|\frac{2}{j}\right| = 2$$

位相

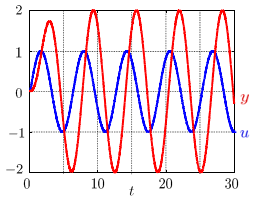
$$\angle G(j) = \angle\frac{2}{j} = \underbrace{\angle 2}_{=0^\circ} - \underbrace{\angle j}_{+\text{方向に位相を考える}} = 0 - 90^\circ = -90^\circ$$



$$y(t) = 2\sin(t - 90^\circ)$$



複素平面上のベクトル $G(j)$



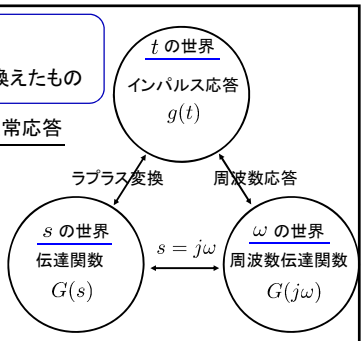
8

周波数伝達関数 $G(j\omega)$

$G(s)$ の s を $j\omega$ で置き換えたもの

$$G(j\omega) = \frac{e^{j\omega t}\text{ に対する定常応答}}{e^{j\omega t}}$$

$$y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega)$$



- 実用的な制御系の解析・設計に役立つ。
- 実験的に測定し，求めることができる。
- 不安定系でも（形式的に）定義できる。

9

第 5 章：周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード：周波数伝達関数，ゲイン，位相

学習目標：システムの周波数応答特性を理解する。

10