## 第 5 章 : 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ゲイン曲線, 位相曲線, 最小位相系, ゲイン－位相関係式

学習目標 : 高次系のボード線図を描くことができる。最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

1

---

5 周波数応答
5.4 ボード線図の性質

### ゲインと位相の関係

[ 例 ]

$$G_1(s) = \frac{1+s}{s^2+s+1},\ G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

ゲイン

$$|G_1(j\omega)| = \frac{|1+j\omega|}{(j\omega)^2+j\omega+1} = \frac{|1+j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{|1-\omega^2+j\omega|}$$

$$= \frac{|1-j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = |G_2(j\omega)|$$ 同じ

位相

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$ 異なる

2

---

$\omega = 0$

$$\angle G_1(0) = \angle G_2(0) = 0^\circ$$

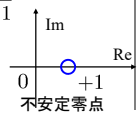
$\omega \to \infty$

$$\angle G_1(j\omega) \approx \angle j\omega - \angle(-\omega^2)$$
$$= 90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$$
$$\angle G_2(j\omega) \approx \angle(-j\omega) - \angle(-\omega^2)$$
$$= -90^\circ - 180^\circ = -270^\circ$$

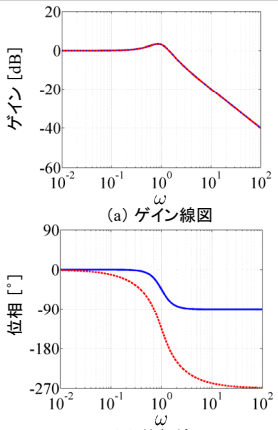
不安定零点の場合
位相の取り方に注意

位相が遅れる

$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$




不安定零点




(a) ゲイン線図

(b) 位相線図

3

---

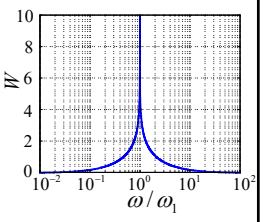
**最小位相系** 安定なシステムでかつ不安定零点をもたない

ゲインから位相が一意に定まる.
(ボードのゲイン－位相関係式)

$$\angle G(j\omega_1) = \frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dM}{du}W\,du$$

(°) 度

$$\begin{cases} u = \ln(\omega/\omega_1) & \text{正規化角周波数} \\ M = \ln|G(j\omega)| & \text{対数ゲイン} \\ W = \ln(\coth(|u|/2)) & \text{重み関数} \end{cases}$$




$\frac{dM}{du}$ 横軸, 縦軸を自然対数目盛りとしたときのゲイン曲線の傾き

$$\int_{-\infty}^{\infty} W\,du = \frac{\pi^2}{2}$$ ( $\omega = \omega_1$ でピーク)

4

---

( $dM/du$ 一定のとき)

$$\angle G(j\omega_1) \approx \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} W\,du$$
$$= \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\frac{\pi^2}{2} = \frac{dM}{du}\times 90^\circ$$
$$= n \times 90^\circ$$

$n = -1$ のとき

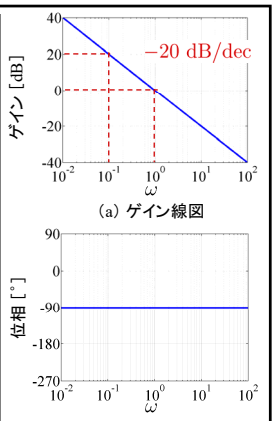
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\frac{dM}{du} = -1$

とすると

$-20$ dB/dec $\Rightarrow$ $\angle G(j\omega_1) \approx -90^\circ$

積分系

1 次系(高周波域)




(a) ゲイン線図

(b) 位相線図

5

---

$n = -2$ のとき

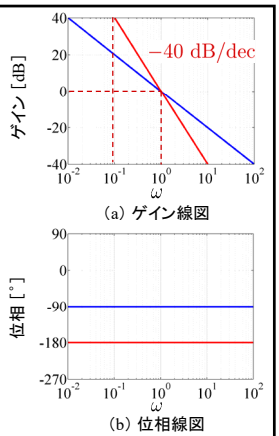
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\frac{dM}{du} = -2$

とすると

$-40$ dB/dec $\Rightarrow$ $\angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ$

2 重積分系

2 次系(高周波域)




(a) ゲイン線図

(b) 位相線図

6

## 5 周波数応答
### 5.4 ボード線図の性質

**ボード線図の利点**　　極形式で表示

［アイデア］　ゲイン：対数スケール
位相：線形スケール

$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$　（直列結合）

$G_i(j\omega) = r_i e^{j\theta_i}$　$(i = 1 \sim 3)$ とおく

$$G(j\omega) = \left(r_1 e^{j\theta_1}\right)\left(r_2 e^{j\theta_2}\right)\left(r_3 e^{j\theta_3}\right)$$
$$= \underbrace{r_1 r_2 r_3}_{=r} e^{j\overbrace{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}^{=\theta}}$$
$$= re^{j\theta}$$

7

$$G(j\omega) = re^{j\theta} = r_1 r_2 r_3 e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log r = 20\log(r_1 r_2 r_3)$$
$$= 20\log r_1 + 20\log r_2 + 20\log r_3$$
$$= \sum_{i=1}^{3} 20\log r_i = \sum_{i=1}^{3} 20\log|G_i(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\theta_i = \sum_{i=1}^{3}\angle G_i(j\omega)$$

直列結合のとき，ゲインと位相を単純に
加えあわせればよい

8

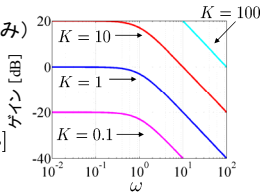
ゲイン $K$ 倍しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} \quad (T=1)$$

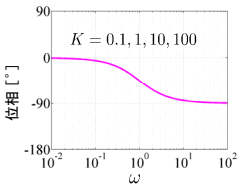
$K = 0.1$ $\xrightarrow{+20\ [\mathrm{dB}]\ (\times 10)}$ $K = 1$ $\xrightarrow{+20\ [\mathrm{dB}]\ (\times 10)}$ $K = 10$

$+40$ [dB] $(\times 100)$

$$G_1(j\omega) = \frac{0.1}{1+j\omega}$$
$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = 10G_1$$
$$|G_2| = 20\log 10 + 20\log G_1$$
$$\angle G_2 = \angle 10 + \angle G_1 = \angle G_1$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

9

$G^{-1}(s)$（逆システム）のボード線図

ゲイン

$$20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| = -20\log|G(j\omega)|$$

位相

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

逆システムでは，ゲインと位相の符号を反転

10

表 5.1　基本要素のボード線図

| $G(s)$ | ゲイン曲線 | 位相曲線 |
|---|---|---|
| $K$ | dB, $20\log\lvert K\rvert$, 0, $\omega$ | 0°, $\omega$ |
| $s$ | dB, 1, 0, $\omega$, 20dB/dec | 90°, 0°, $\omega$ |
| $\frac{1}{s}$ | dB, 1, −20dB/dec, 0, $\omega$ | 0°, −90°, $\omega$ |
| $Ts+1$ | dB, 20dB/dec, 0, $1/T$, $\omega$ | 90°, 0°, $0.2/T$, $5/T$, $\omega$ |
| $\frac{1}{Ts+1}$ | dB, $1/T$, 0, $\omega$, −20dB/dec | 0°, −90°, $0.2/T$, $5/T$, $\omega$ |
| $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ | dB, 0, $\omega_n$, $\omega$ | 0°, −180°, $\omega_n$, $\omega$ |

11

［例 5. 1］

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+10)} = G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)\cdot G_4(s)$$
$$= 10\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.1s+1}\cdot(s+1)$$

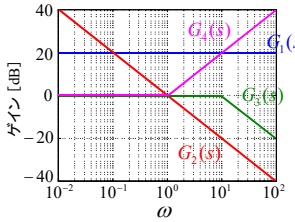


図 5. 12　各要素のゲイン線図
（折れ線近似）

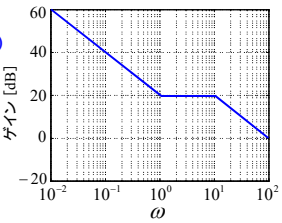


図 5. 13　$G(s)$のゲイン線図
（折れ線近似）

12

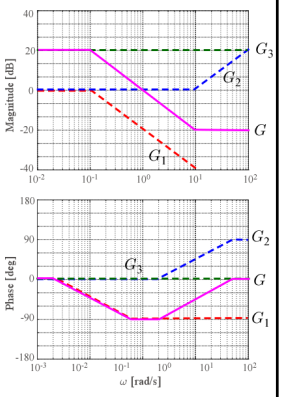
## 5章演習問題【5】(b)

$$\frac{s+10}{10s+1}$$

$$G(s)=\frac{s+10}{10s+1}=\underbrace{\left(\frac{1}{10s+1}\right)}_{G_1(s)}\cdot(s+10)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{10s+1}\right)}_{G_1(s)}\cdot\underbrace{(0.1s+1)}_{G_2(s)}\cdot\underbrace{10}_{G_3(s)}$$

| | $T$ | $1/T$ | $0.2/T$ | $5/T$ |
|---|---|---|---|---|
| $G_1(s)$ | 10 | 0.1 | 0.02 | 0.5 |
| $G_2(s)$ | 0.1 | 10 | 2 | 50 |

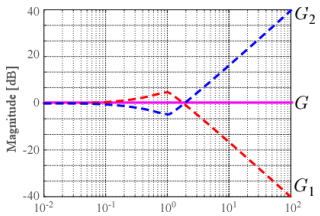



13

## 5章演習問題【6】(c)

$$\frac{s^2-3s+1}{s^2+3s+1}$$

$$G(s)=\frac{s^2-3s+1}{s^2+3s+1}=\underbrace{(s^2-3s+1)}_{G_1(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+3s+1}}_{G_2(s)}$$




14

## ボード線図の利点

- システムを直列結合したもののボード線図は各システムのボード線図を単に加え合わせるだけで得られる.
- 折れ線近似が容易で，システムの概略特性を簡単に精度よく把握できる.
- 最小位相系では，ゲイン曲線から位相曲線の概略がわかる.
- 広い周波数帯域を1枚の図面で扱える.
- 実験データからボード線図を描くことも容易である.

15

## むだ時間要素

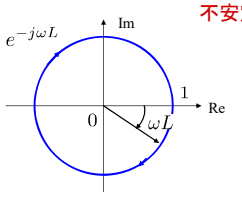
$$G(s)=e^{-sL}$$

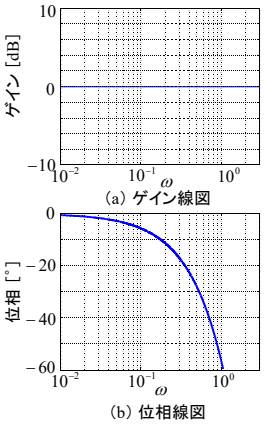
パデー近似

$$e^{-sL}\approx\frac{1-Ls/2}{1+Ls/2}$$

$$e^{-sL}\approx\frac{1-Ls/2+(Ls)^2/12}{1+Ls/2+(Ls)^2/12}$$

不安定零点




16

## 第 5 章 : 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ゲイン曲線，位相曲線，最小位相系，ゲイン－位相関係式

学習目標 : 高次系のボード線図を描くことができる。最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

17