第 5 章 : 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード： ゲイン曲線，位相曲線，最小位相系，
ゲインー位相関係式

学習目標 : 高次系のボード線図を描くことができる。
最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。

5 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

ゲインと位相の関係

[例]

$$G_1(s) = \frac{1+s}{s^2+s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

ゲイン

$$|G_1(j\omega)| = \frac{|1+j\omega|}{(j\omega)^2+j\omega+1} = \frac{|1+j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{|1-\omega^2+j\omega|}$$

$$= \frac{|1-j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = |G_2(j\omega)|$$

同じ

位相

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

異なる

$$\omega = 0$$

$$\angle G_1(0) = \angle G_2(0) = 0^\circ$$

$$\omega \to \infty$$

$$\angle G_1(j\omega) \approx \angle j\omega - \angle(-\omega^2)$$

$$= 90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$$

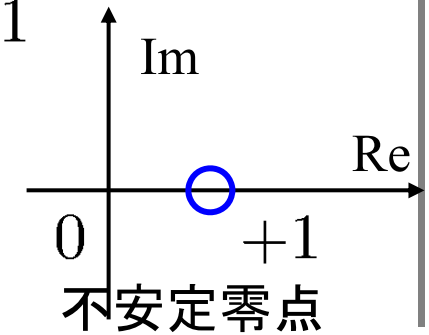
$$\angle G_2(j\omega) \approx \angle(-j\omega) - \angle(-\omega^2)$$

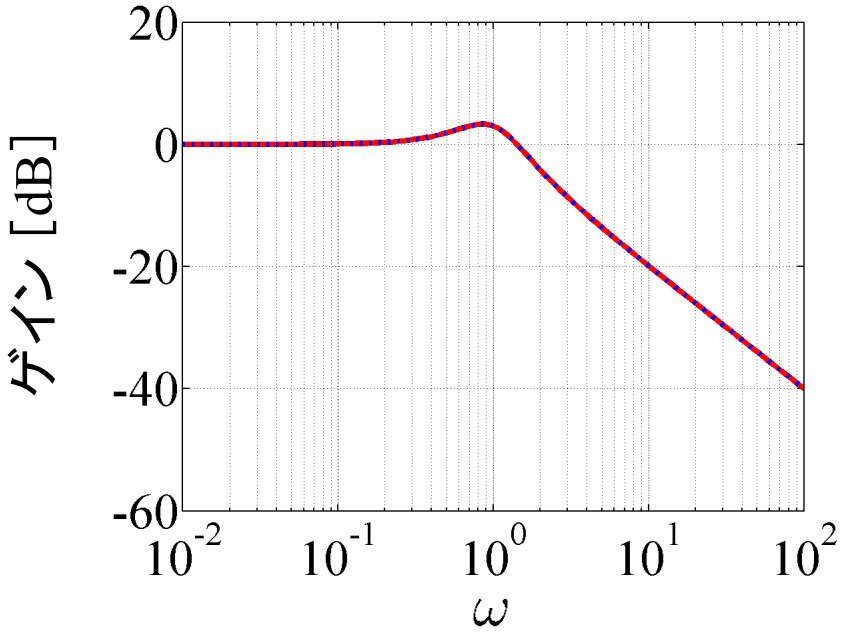
$$= \underline{-90^\circ} - 180^\circ = -270^\circ$$

不安定零点の場合
位相の取り方に注意

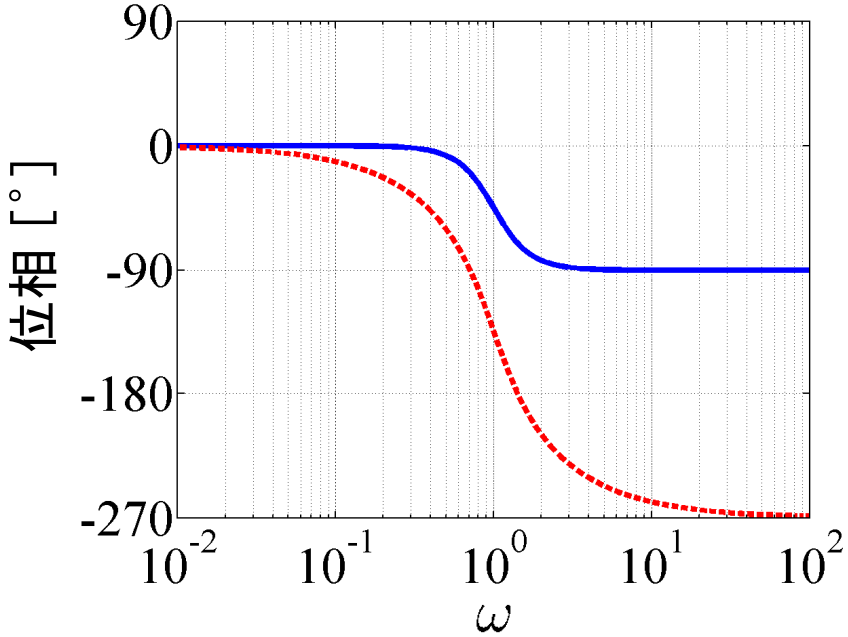
位相が遅れる

$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$





(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

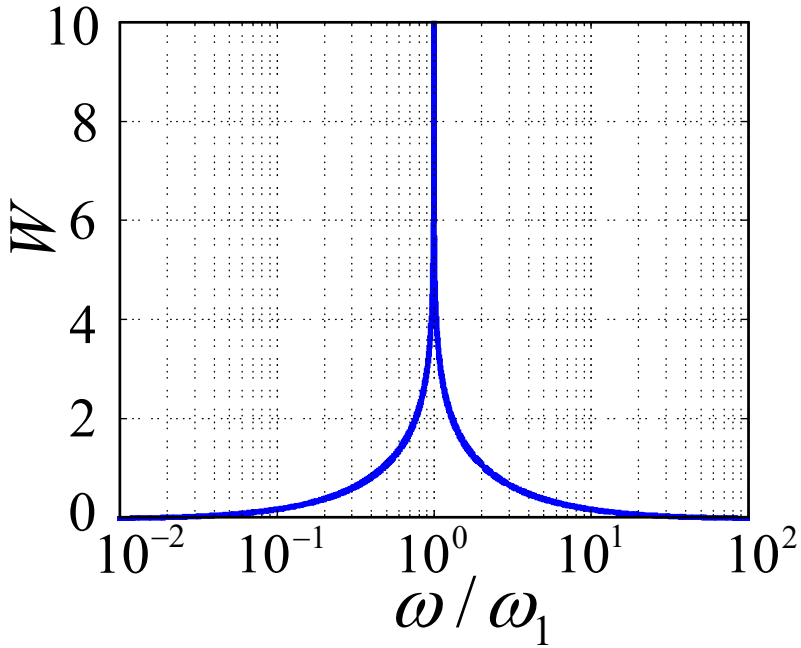
最小位相系　安定なシステムでかつ不安定零点をもたない

ゲインから位相が一意に定まる.
（ボードのゲイン－位相関係式）

$$\angle G(j\omega_1) = \frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dM}{du}W\,du$$

$(^\circ)$ 度

$$\begin{cases} u = \ln(\omega/\omega_1) & \text{正規化角周波数} \\ M = \ln|G(j\omega)| & \text{対数ゲイン} \\ W = \ln(\coth(|u|/2)) & \text{重み関数} \end{cases}$$



$\dfrac{dM}{du}$　横軸，縦軸を自然対数目盛りとしたときのゲイン曲線の傾き

$$\int_{-\infty}^{\infty} W\,du = \frac{\pi^2}{2}$$

（$\omega = \omega_1$ でピーク）

（dM/du 一定のとき）

$$\angle G(j\omega_1) \approx \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} W du$$

$$= \frac{dM}{du}\frac{180}{\pi^2}\frac{\pi^2}{2} = \frac{dM}{du} \times 90^\circ$$

$$= n \times 90^\circ$$

<u>$n = -1$ のとき</u>

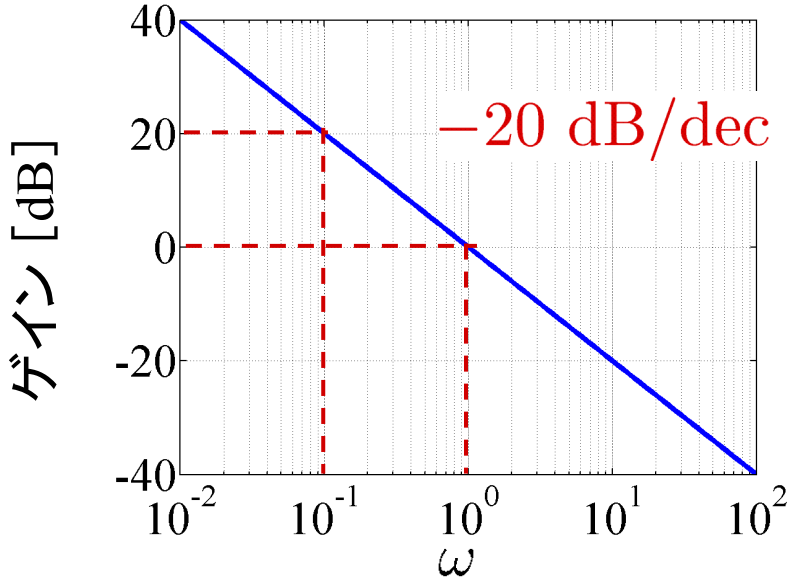
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du} = -1$

とすると

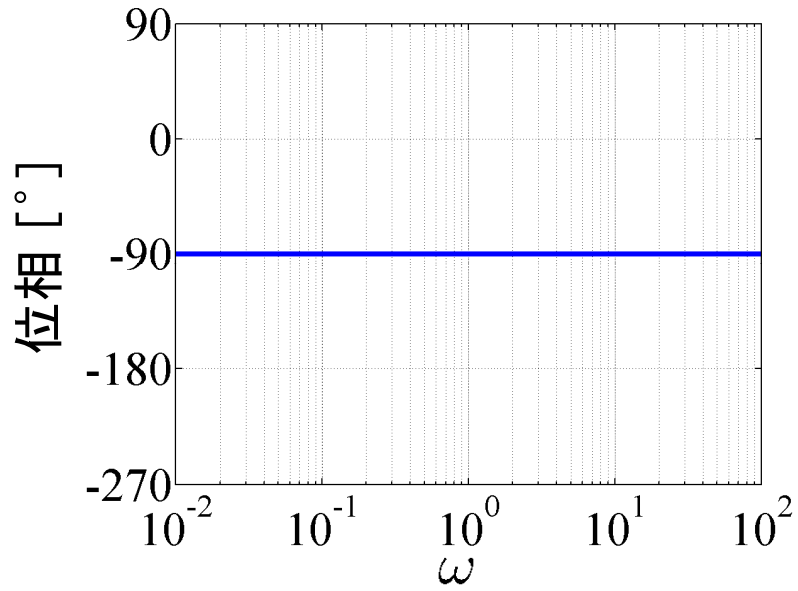
-20 dB/dec $\Rightarrow$ $\angle G(j\omega_1) \approx -90^\circ$

積分系

1 次系（高周波域）



（a）ゲイン線図



（b）位相線図

$n = -2$ のとき

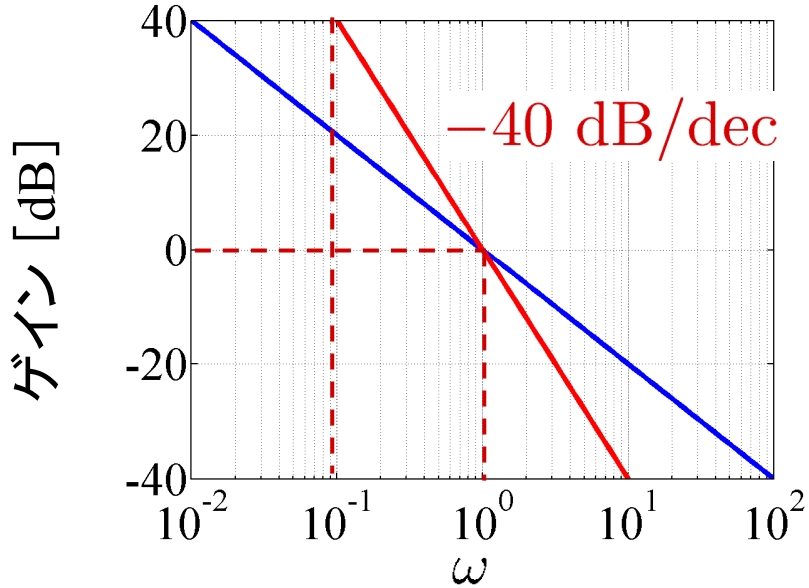
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du} = -2$

とすると

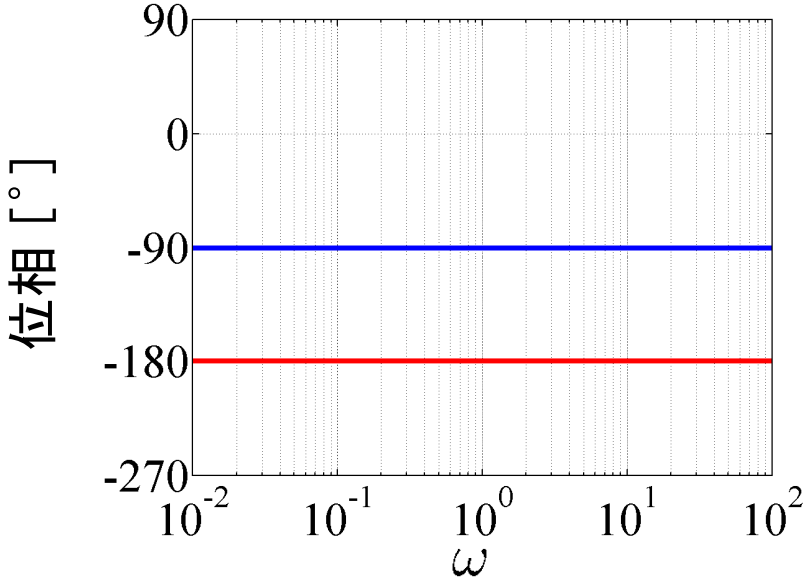
$-40\ \mathrm{dB/dec} \Rightarrow \angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ$

2 重積分系

2 次系（高周波域）



（a）ゲイン線図



（b）位相線図

5 周波数応答
5.4 ボード線図の性質

ボード線図の利点　　極形式で表示

［アイデア］　ゲイン：対数スケール

位相：線形スケール

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \quad \text{（直列結合）}$$

$G_i(j\omega) = r_i e^{j\theta_i} \quad (i = 1 \sim 3)$ とおく

$$G(j\omega) = \left(r_1 e^{j\theta_1}\right)\left(r_2 e^{j\theta_2}\right)\left(r_3 e^{j\theta_3}\right)$$

$$= \underbrace{r_1 r_2 r_3}_{=r} e^{j\underbrace{(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}_{=\theta}}$$

$$= re^{j\theta}$$

$$G(j\omega) = re^{j\theta} = r_1 r_2 r_3 e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$\begin{aligned}
20\log|G(j\omega)| &= 20\log r = 20\log(r_1 r_2 r_3) \\
&= 20\log r_1 + 20\log r_2 + 20\log r_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3} 20\log r_i = \sum_{i=1}^{3} 20\log|G_i(j\omega)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\angle G(j\omega) &= \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \theta_i = \sum_{i=1}^{3} \angle G_i(j\omega)
\end{aligned}$$

直列結合のとき，ゲインと位相を単純に
加えあわせればよい

ゲイン K 倍しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \qquad (T = 1)$$

$$K = 0.1 \xrightarrow{+20\ [\mathrm{dB}]\ (\times 10)} K = 1 \xrightarrow{+20\ [\mathrm{dB}]\ (\times 10)} K = 10$$

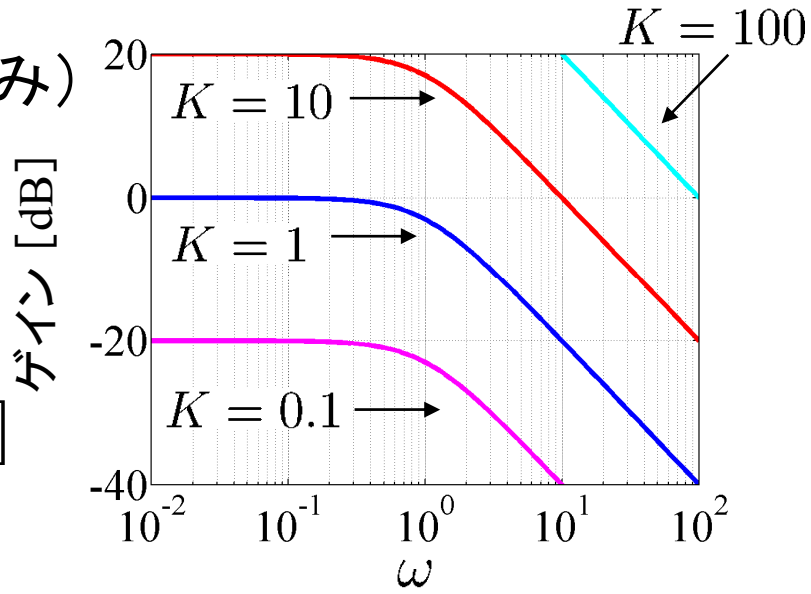
$$K = 0.1 \xrightarrow{+40\ [\mathrm{dB}]\ (\times 100)} K = 10$$

$$G_1(j\omega) = \frac{0.1}{1 + j\omega}$$

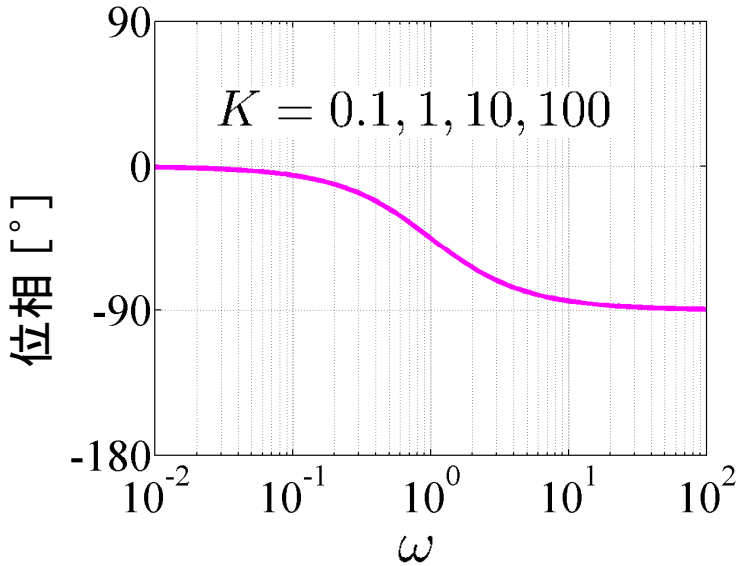
$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = 10G_1$$

$$|G_2| = 20\log 10 + 20\log G_1$$

$$\angle G_2 = \angle 10 + \angle G_1 = \angle G_1$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

$G^{-1}(s)$（逆システム）のボード線図

ゲイン

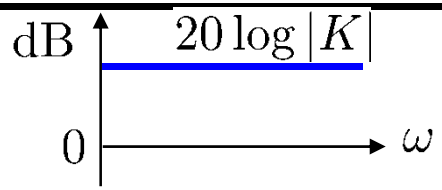
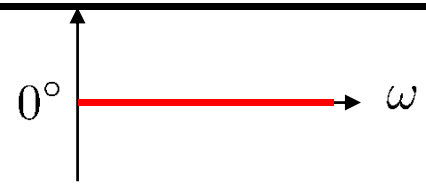
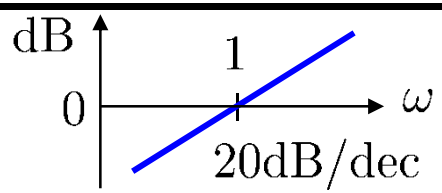
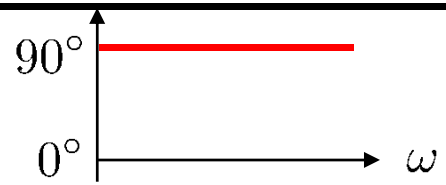
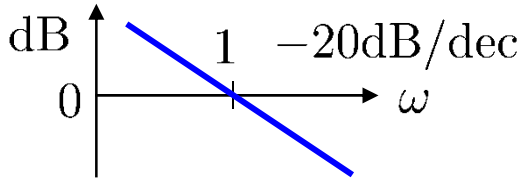
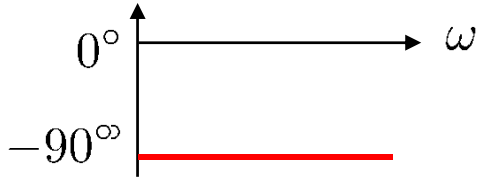
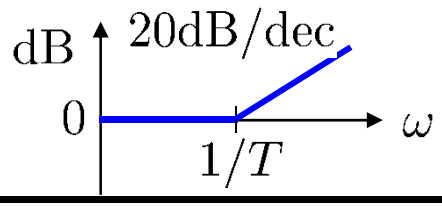
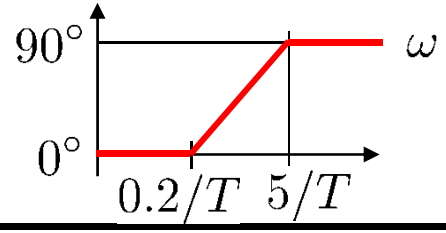
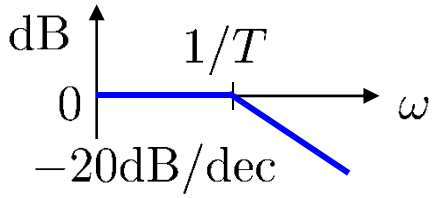
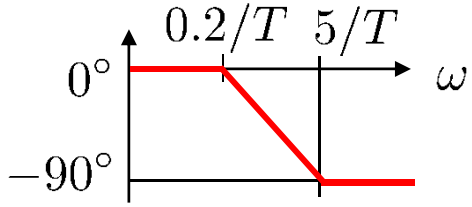
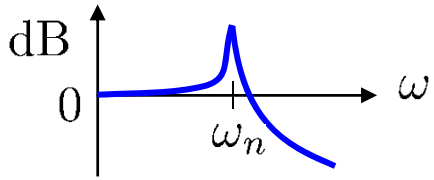
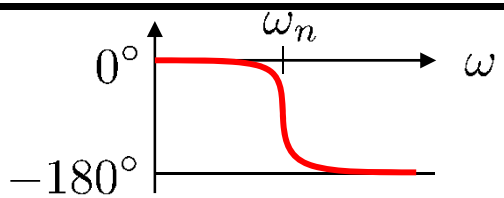
$$20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| = -20\log|G(j\omega)|$$

位相

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

逆システムでは，ゲインと位相の符号を反転

表 5.1　基本要素のボード線図

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K		
s		
$\frac{1}{s}$		
$Ts+1$		
$\frac{1}{Ts+1}$		
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$		

[例 5. 1]

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+10)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s)$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{0.1s+1} \cdot (s+1)$$

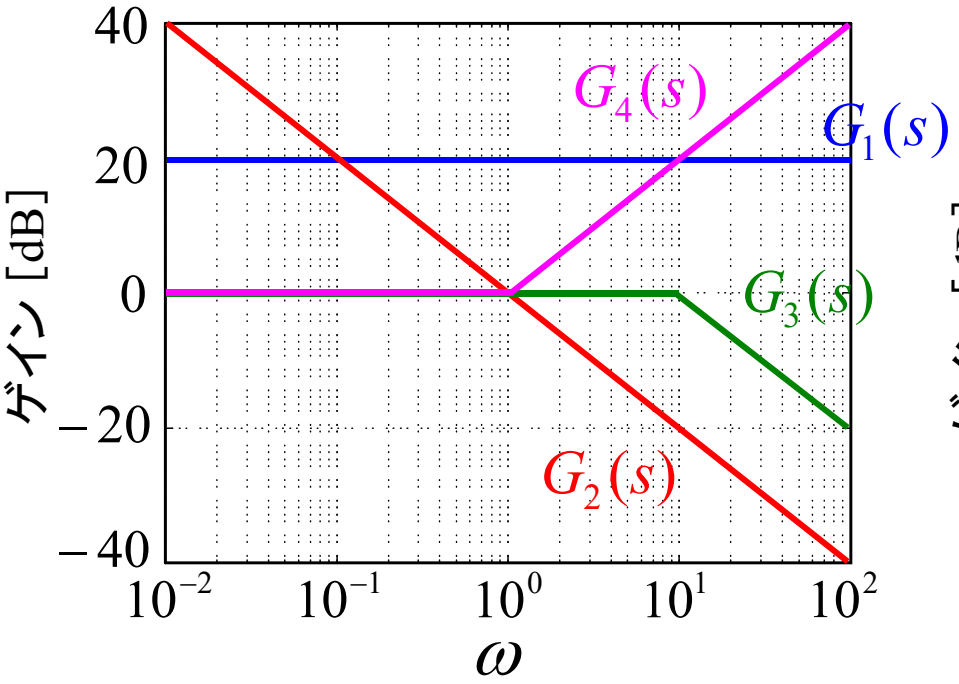


図 5. 12 各要素のゲイン線図
（折れ線近似）

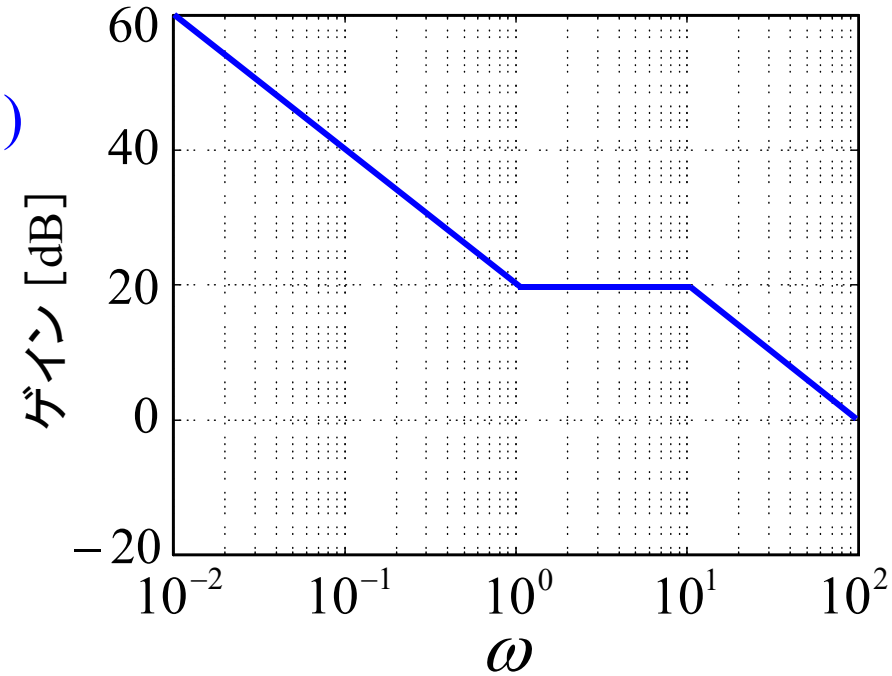


図 5. 13 $G(s)$のゲイン線図
（折れ線近似）

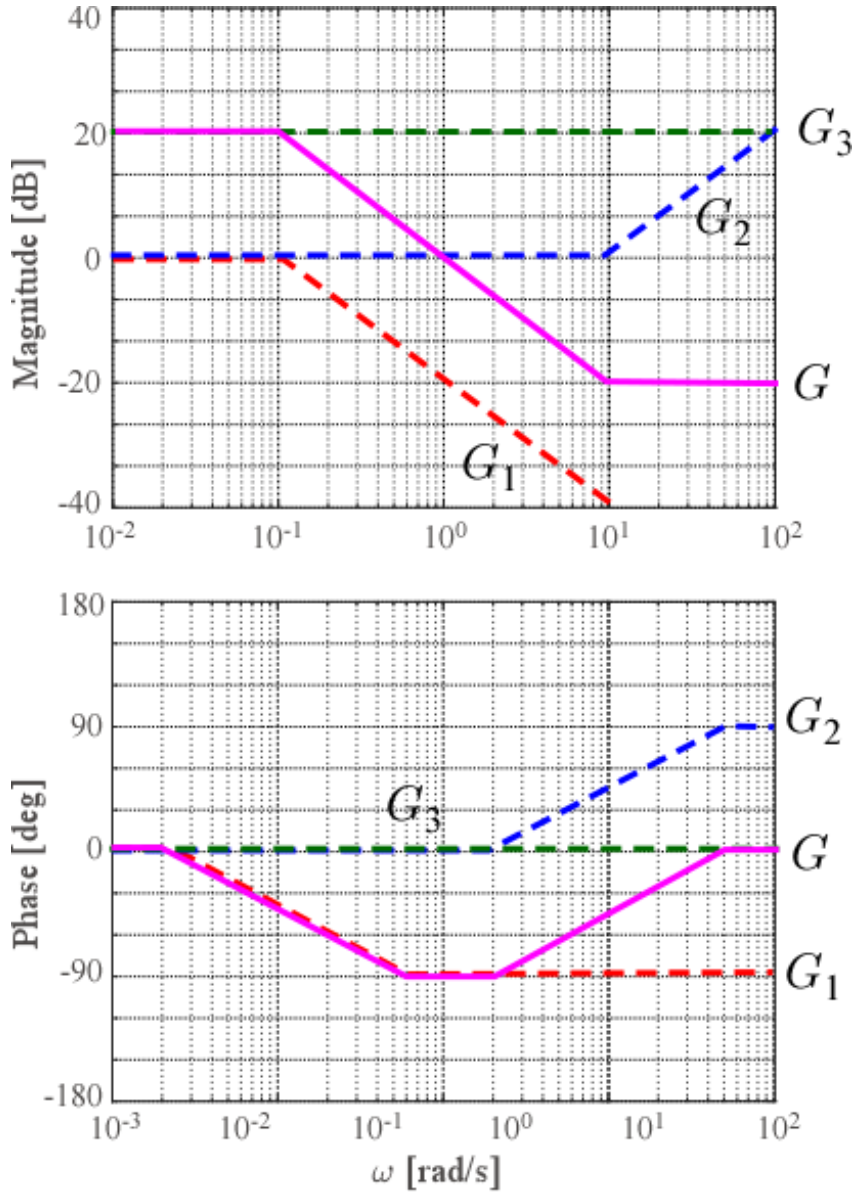
5章演習問題【5】(b)

$$\frac{s+10}{10s+1}$$

$$G(s) = \frac{s+10}{10s+1} = \left(\frac{1}{10s+1}\right)\cdot(s+10)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{10s+1}\right)}_{G_1(s)} \cdot \underbrace{(0.1s+1)}_{G_2(s)} \cdot \underbrace{10}_{G_3(s)}$$

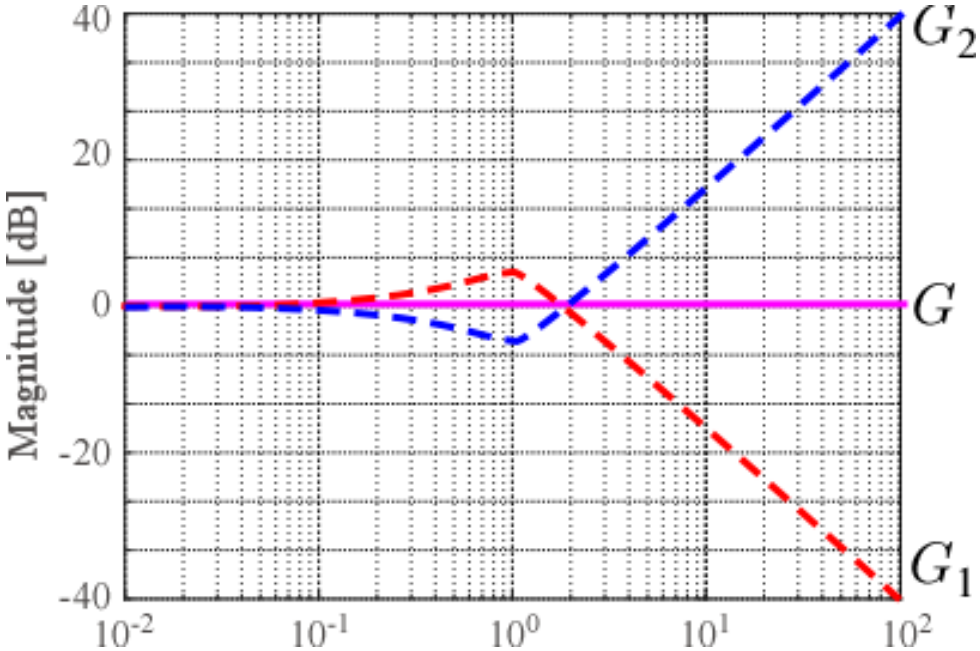
	T	$1/T$	$0.2/T$	$5/T$
$G_1(s)$	10	0.1	0.02	0.5
$G_2(s)$	0.1	10	2	50



5章演習問題【6】(c)

$$\frac{s^2-3s+1}{s^2+3s+1}$$

$$G(s)=\frac{s^2-3s+1}{s^2+3s+1}=\underbrace{(s^2-3s+1)}_{G_1(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+3s+1}}_{G_2(s)}$$



ボード線図の利点

- システムを直列結合したもののボード線図は各システムのボード線図を単に加え合わせるだけで得られる.
- 折れ線近似が容易で，システムの概略特性を簡単に精度よく把握できる.
- 最小位相系では，ゲイン曲線から位相曲線の概略がわかる.
- 広い周波数帯域を1枚の図面で扱える.
- 実験データからボード線図を描くことも容易である.

むだ時間要素

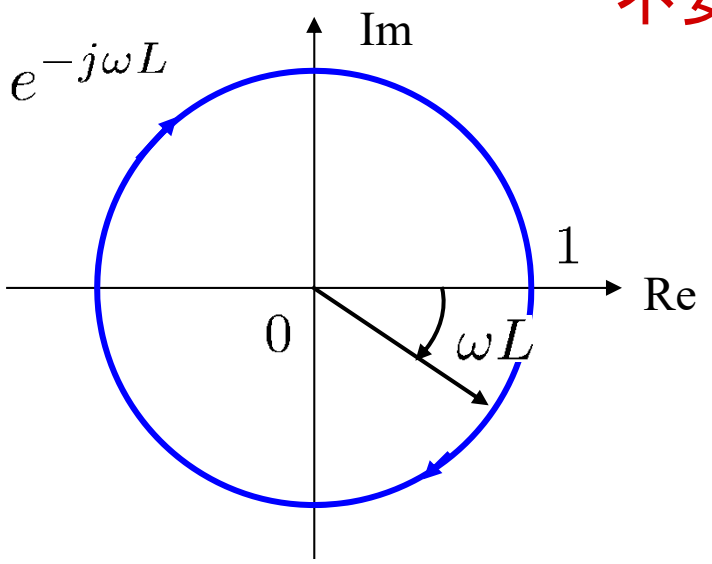
$$G(s) = e^{-sL}$$

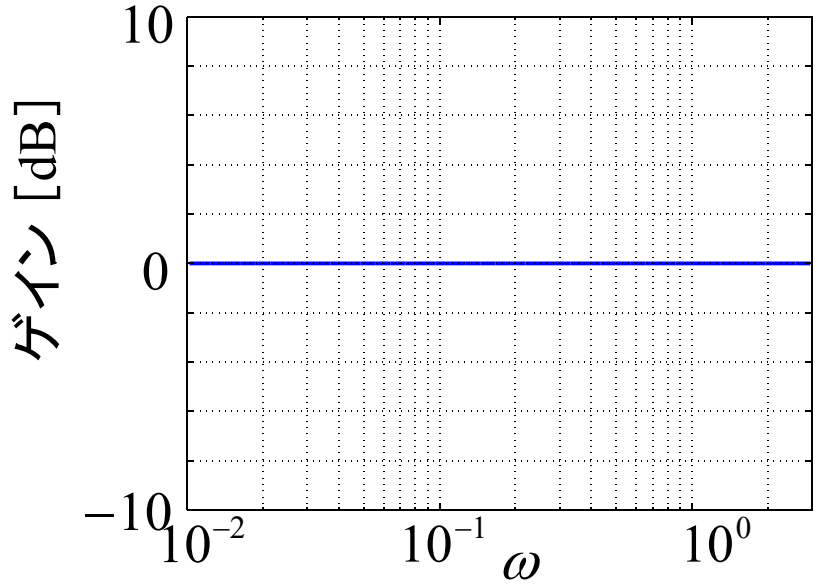
パデー近似

$$e^{-sL} \approx \frac{1 - Ls/2}{1 + Ls/2}$$

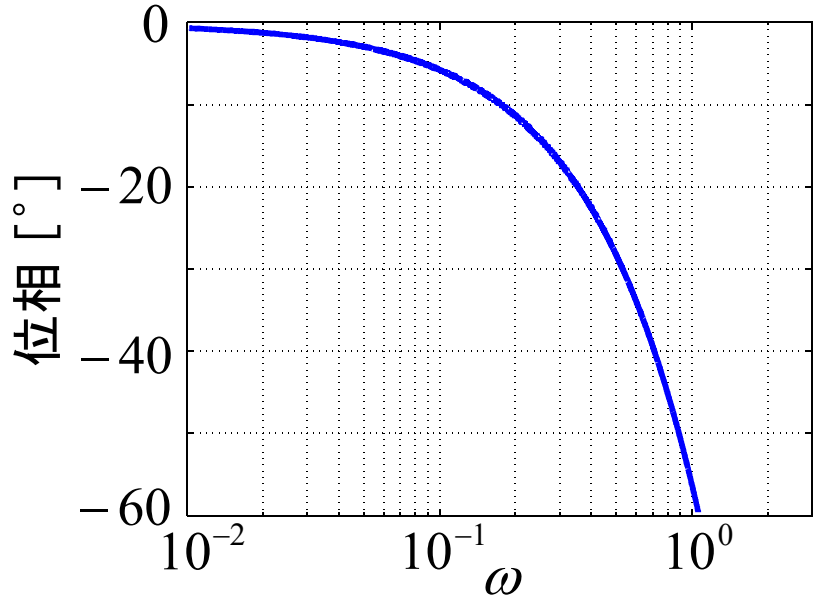
$$e^{-sL} \approx \frac{1 - Ls/2 + (Ls)^2/12}{1 + Ls/2 + (Ls)^2/12}$$

不安定零点





(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

第 5 章 : 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード： ゲイン曲線，位相曲線，最小位相系，
ゲインー位相関係式

学習目標 : 高次系のボード線図を描くことができる。
最小位相系におけるゲインと位相の関係について理解する。