第 6 章 :フィードバック制御系の安定性

6.1 フィードバック制御系の内部安定性

キーワード : 内部安定性, 特性多項式

学習目標 : フィードバック制御系の内部安定性について理解する。

1

6 フィードバック制御系の安定性
6.1 フィードバック制御系の内部安定性

$P(s)$: 厳密にプロパー ($P(\infty) = 0$)
分母の次数が分子の次数より大きい

$K(s)$: プロパー ($|K(\infty)| < \infty$)

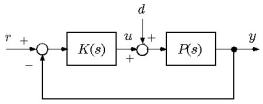
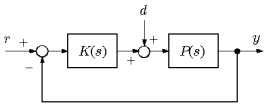


図 6.1 フィードバック制御系

[例 6.1] 不安定な極零相殺

$$P(s) = \frac{1}{s-1},\quad K(s) = \frac{s-1}{s} = 1 - \frac{1}{s}$$

$$P(s)K(s) = \frac{1}{\cancel{s-1}} \cdot \frac{\cancel{s-1}}{s} = \frac{1}{s}$$



$d = 0$ のとき

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \cdot r(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} \cdot r(s) = \frac{1}{s+1} \cdot r(s)$$ 安定？

2

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow \quad (s-1)y(s) = u(s)$$

$$\dot{y}(t) - y(t) = u(t)$$

初期値 y_0 を考慮

$$(sy(s) - y_0) - y(s) = u(s)$$

$$y(s) = \frac{1}{s-1}u(s) + \frac{1}{s-1}y_0$$

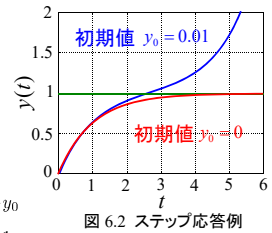


図 6.2 ステップ応答例

$u(s) = K(s)(r(s) - y(s)),\quad K(s) = \frac{s-1}{s}$ より

$$y(s) = \frac{1}{\cancel{s-1}} \cdot \frac{\cancel{s-1}}{s}(r(s) - y(s)) + \frac{1}{s-1}y_0$$

$$(s+1)y(s) = r(s) + \frac{s}{s-1}y_0$$

$$y(s) = \frac{1}{s+1}r(s) + \frac{s}{(s+1)\underbrace{(s-1)}_{\text{不安定}}}y_0$$

3

内部安定性

外部から加わる信号 $\{r(s),\ d(s)\}$ から各要素の出力 $\{u(s),\ y(s)\}$ への 4 つの伝達関数がすべて安定

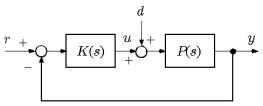
G_{yr} だけでは不十分

$$G_{ur}(s) = \frac{K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{ud}(s) = \frac{-P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}$$



4

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)},\quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{D_P(s)N_K(s)}{\phi(s)} \qquad G_{ud}(s) = \frac{-N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)} \qquad G_{yd}(s) = \frac{N_P(s)D_K(s)}{\phi(s)}$$

$$\underbrace{\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)}_{\text{特性多項式}}$$

[定理] (内部安定性の必要十分条件)

特性多項式

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

のすべての根の実部が負

5

[例 6.1] $P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)},\quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

$$P(s) = \frac{1}{s-1},\quad K(s) = \frac{s-1}{s}$$

$$\phi(s) := (s-1)\cdot s + 1 \cdot (s-1) = \underbrace{(s-1)}_{\text{不安定}}(s+1) = 0$$

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{(s-1)}(s+1)}$$

不安定な極零相殺が生じている

6

[結果 1]

$P(s)$ と $K(s)$ の間に不安定な極零相殺が存在するとき，
フィードバック制御系は内部安定ではない。

[結果 2]

$P(s)$と$K(s)$の間に不安定な極零相殺が存在しないとき，
以下の三つは等価である

(a) フィードバック制御系が内部安定

(b) $G_{yr}(s)$ が安定 $\left(G_{yr}(s) = \dfrac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}\right)$

(c) $1+P(s)K(s)$ の零点がすべて安定

7

Well-posed（ウェルポーズド）

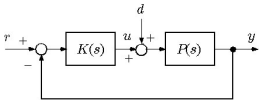


図 6.1 フィードバック制御系

$P(s) = \dfrac{s}{s+1}, \quad K(s) = -1$

$G_{ur}(s) = -s-1,\ G_{ud}(s) = -G_{yr}(s) = G_{yd}(s) = s$

プロパーではない

Well-posed

$G_{ur}(s),\ G_{ud}(s),\ G_{yr}(s),\ G_{yd}(s)$がすべて適切に定義され，
かつプロパーになるとき，フィードバック系は well-posed である
といわれる．

必要十分条件 $1+P(\infty)K(\infty) \neq 0$

8

第 6 章 :フィードバック制御系の安定性

6.1 フィードバック制御系の内部安定性

キーワード： 内部安定性，特性多項式

学習目標 :フィードバック制御系の内部安定性について
理解する。

9