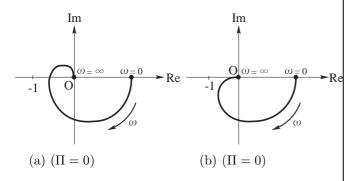
2021年度 制御工学 II 前期 第10回レポート (模範解答)

5年 E 科 番号 _____ 氏名 _

[問題 1]

以下の図に示すベクトル軌跡を持つ制御系が安定で あるかどうかを簡単化されたナイキストの安定判別法 を用いて判別せよ。ただし,Ⅱは右半平面にある極の 数を表している。



(解答)

(a) (ステップ 1) 問題より、いずれも右半平面には極 がないので、極の実部に正となるもはない。

(ステップ2)ベクトル軌跡は問題に与えられてい る。

(ステップ 3)点(-1,0)を常に左に見えるように動く. よって,安定

(b) (ステップ 1) 問題より、いずれも右半平面には極 がないので、極の実部に正となるもはない。

(ステップ2)ベクトル軌跡は問題に与えられてい る。

(ステップ 3)点(-1,0)を常に左に見えるように動く. よって,安定

[問題 2]

開ループ伝達関数 L(s) が以下のように与えられると き,ベクトル軌跡の概形を描き,簡単化されたナイキス トの安定判別法を用いて判別せよ。

$$L(s) = \frac{s}{s+2} \tag{1}$$

(解答) 出発点のゲインと位相は,原点に極を持たない ので

$$|G(0)| = \frac{0}{2} = 0$$
 (2)
 $\angle G(0) = 0^{\circ}$ (3)

$$\angle G(0) = 0^{\circ} \tag{3}$$

となる。

終点のゲインは,

$$|G(j\omega)|_{\omega=\infty} = \left| \frac{j\omega}{j\omega + 2} \right|_{\omega=\infty}$$

$$\approx \left| \frac{j\omega}{j\omega} \right|_{\omega=\infty} = 1$$
(4)

終点の位相は,n-m=1-1=0より

$$\angle G(j\infty) = 0^{\circ} \tag{5}$$

となる。

 $\omega=0$ と $\omega=\infty$ の途中が不明なので , $\omega=1$ を考え る。ゲインは

$$|G(j1)| = \left| \frac{j}{j+2} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
 (6)

位相は,

$$\angle G(i1) = \angle i - \angle (i+2) = 90^{\circ} - (0^{\circ} \sim 90^{\circ})$$
 (7)

より、位相は、 $0^{\circ} \sim 90^{\circ}$ となる。計算すると $\angle(j+2) =$ 27° である。よって,図1となる。ここで,矢印を忘れ ないようにする。

よって,点(-1,0)を回らないので,安定となる。

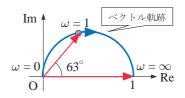


図 1: ベクトル軌跡

[問題 3] 開ループ伝達関数 L(s) が以下のように与えられるとき,ベクトル軌跡の概形を描き,フィードバック制御系が安定となるゲイン K の範囲を求めよ。ただし, $T_i>0$,i=1 $^{\sim}2$,K>0 とする。

$$L(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$
(8)

(解答) ω が $0,\infty$ のときの L(s) のゲインと位相を求め,ベクトル軌跡を描く。L(s) の周波数伝達関数は

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)}$$
$$= \frac{K}{-\omega^2(T_1 + T_2) + j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2)}$$
(9)

より, ゲインは

$$|L(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2(T_1 + T_2))^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2}}$$
(10)

で与えられる。よって, ω が $0,\infty$ のときの L(s) のゲインは

$$|L(0)| = \infty \qquad |L(\infty)| = 0 \tag{11}$$

となる。また、位相は $\omega \approx 0$, $\omega \approx \infty$ において

$$L(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega} \quad (\omega \approx 0)$$
 (12)

$$L(j\omega) \approx \frac{K}{T_1 T_2(j\omega)^3} \quad (\omega \approx \infty),$$
 (13)

と近似できることから, 位相はそれぞれ

$$\angle L(0) = \angle \frac{1}{j} = -90^{\circ} \qquad \angle L(\infty) = \angle \frac{1}{(j)^3} = -270^{\circ} (14)$$

となる。また, (9) 式から

$$L(j\omega) = \frac{K(-\omega^2(T_1 + T_2) - j\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2))}{\omega^4(T_1 + T_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2}$$
(15)

となるから、その実部は

$$Re[L(j\omega)] = \frac{-K\omega^{2}(T_{1} + T_{2})}{\omega^{4}(T_{1} + T_{2})^{2} + \omega^{2}(1 - \omega^{2}T_{1}T_{2})^{2}}$$
$$= \frac{-K(T_{1} + T_{2})}{\omega^{2}(T_{1} + T_{2})^{2} + (1 - \omega^{2}T_{1}T_{2})^{2}}16)$$

となる。 $\omega = 0$ では,

$$\operatorname{Re}[L(j\omega)] = -K(T_1 + T_2) \tag{17}$$

となる。よって、ベクトル軌跡の概形は 図 2 のようになる。

次にゲイン K の範囲を求める。ベクトル軌跡が実軸と交わる位相交差周波数 ω_{pc} は $\mathrm{Im}[L(j\omega)]=0$ が成立することから

$$\omega(1 - \omega^2 T_1 T_2) K = 0$$
 & $\omega_{pc} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ (18)

となる。このとき $\operatorname{Re}[L(j\omega_{pc})]$ は

$$\operatorname{Re}[L(j\omega_{pc})] = \frac{K}{-\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + j\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}(1 - 1)} = -\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} (19)$$

となる。安定となるためには、この点が(-1,0)を越えなければよいので

$$-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2}>-1 \quad \mbox{ つまり} \quad K<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2} \quad \ (20)$$

を満たせばよい。

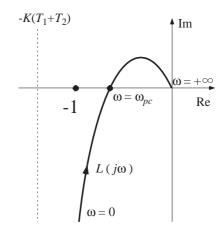


図 2: ベクトル軌跡