

# 第6章：フィードバック制御系の安定性

## 6.3 ゲイン余裕, 位相余裕

キーワード：位相交差周波数, ゲイン交差周波数,  
位相余裕, ゲイン余裕

学習目標：安定性の程度を評価するゲイン余裕や  
位相余裕について理解する。

## 6 フィードバック制御系の安定性

### 6.3 ゲイン余裕, 位相余裕

位相交差周波数  $\omega_{pc}$

ベクトル軌跡が負の実軸を横切る点  $P$  に対応  
位相が  $-180^\circ$  になる

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$

ゲインがちょうど 1 になる点  $G$  に対応  
単位円を横切る

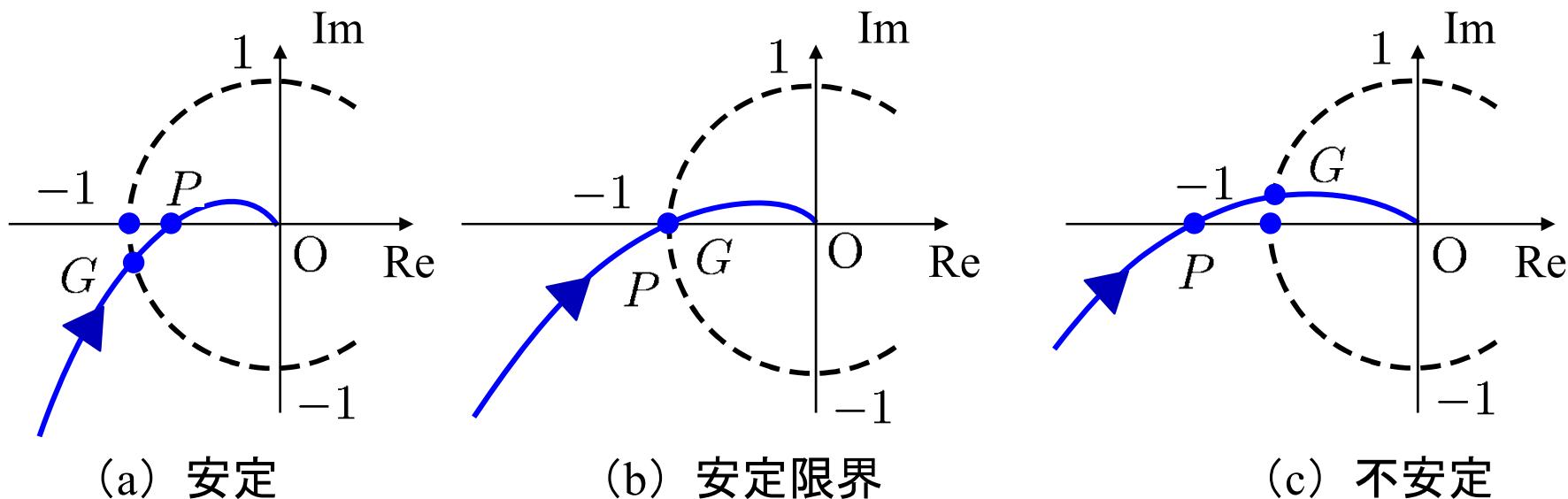


図6.11 ベクトル軌跡と安定性

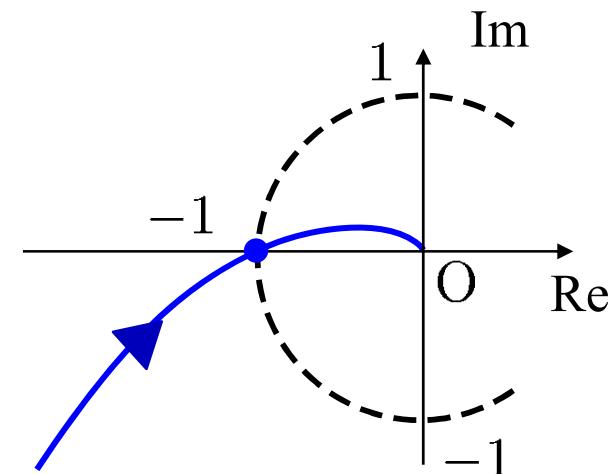
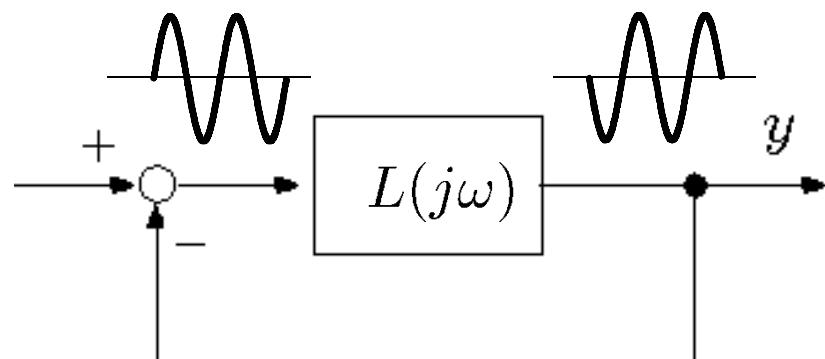
## (1) 安定限界

ベクトル軌跡がちょうど点  $(-1, 0)$  の上を通る

$\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ$  のとき

$$|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| = 1$$

$\omega_{pc}$  : ベクトル軌跡の位相が  
 $-180^\circ$  になる周波数



(b) 安定限界

図6.11 ベクトル軌跡と安定性

## (2) 安定

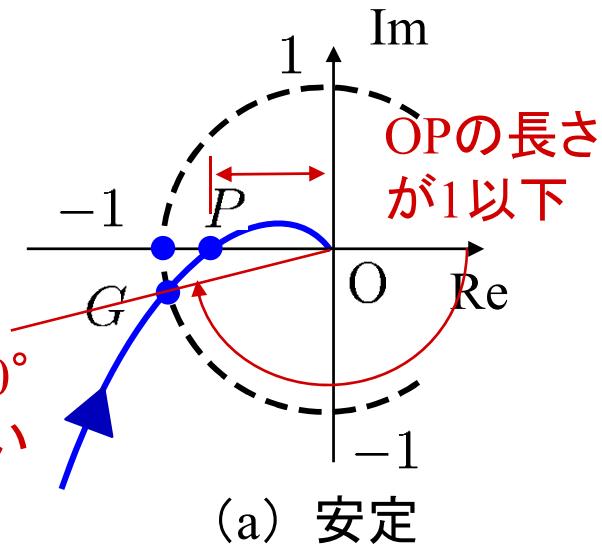
$\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ$  のとき

$$|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| < 1$$

$|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| = 1$  のとき

$$\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) > -180^\circ$$

位相が-180°よりも大きい



## (3) 不安定

$\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ$  のとき

$$|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| > 1$$

$|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| = 1$  のとき

$$\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) < -180^\circ$$

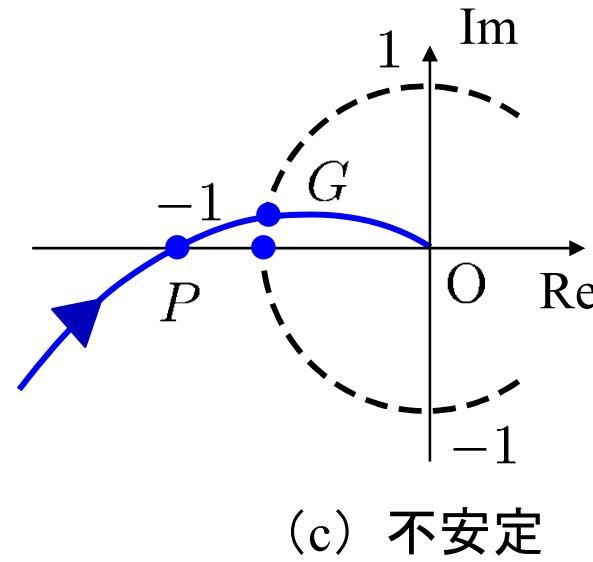


図6.11 ベクトル軌跡と安定性

ベクトル軌跡が点  $(-1, 0)$  からある程度離れて  
いるならば、**安定余裕**がある。

### ゲイン余裕 GM

あとどれだけゲインを増やすと  
制御系が不安定になるか。

$$GM = 20 \log \frac{1}{OP} \quad [\text{dB}]$$

### 位相余裕 PM

あとどれだけ位相が遅れると  
制御系が不安定になるか。

$$PM = \angle GOP \quad [^\circ]$$

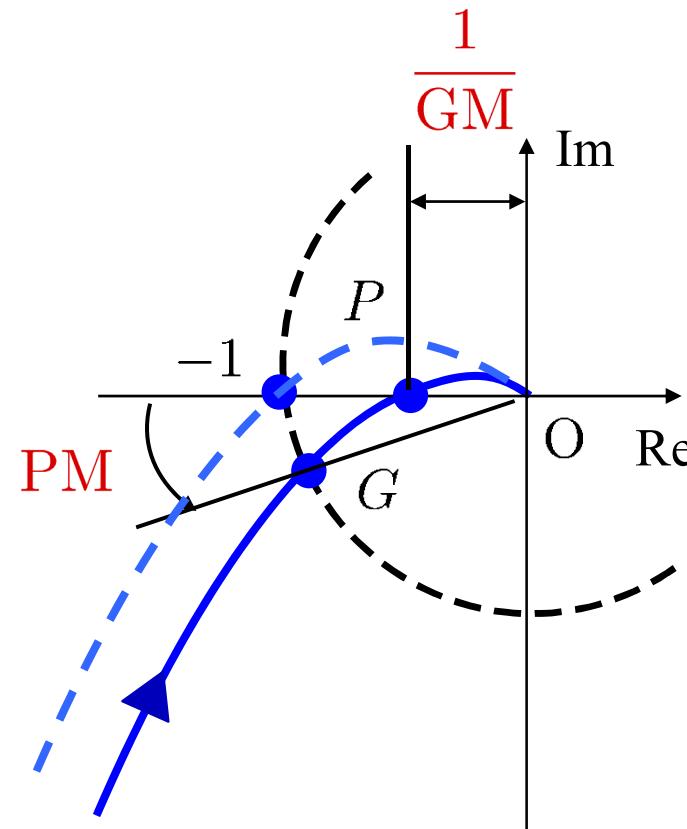
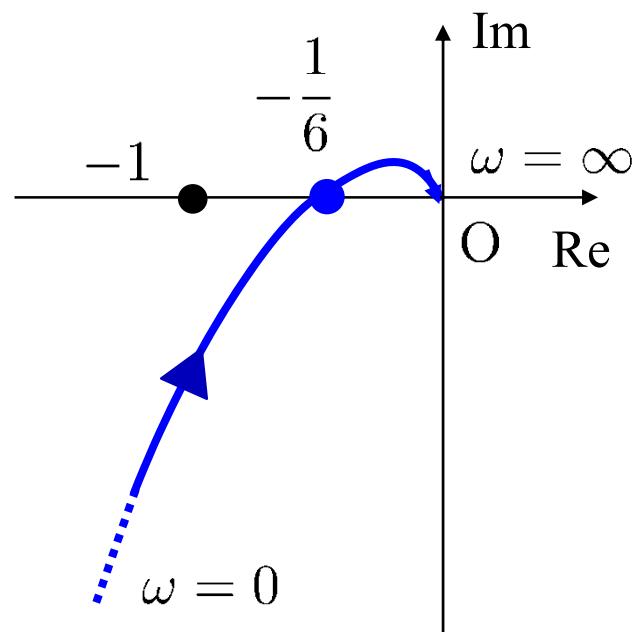


図 ゲイン余裕、位相余裕

## [例] ゲイン余裕

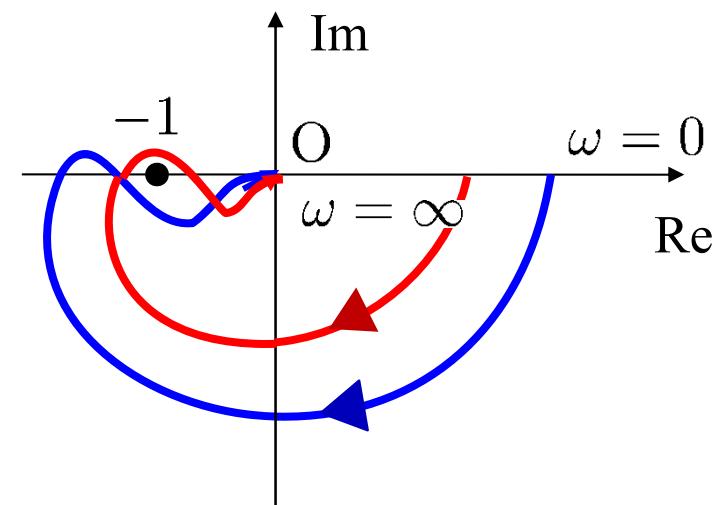
$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



安定

$GM = 6$

$(GM = 20 \log 6 \text{ [dB]})$



安定(条件付安定)

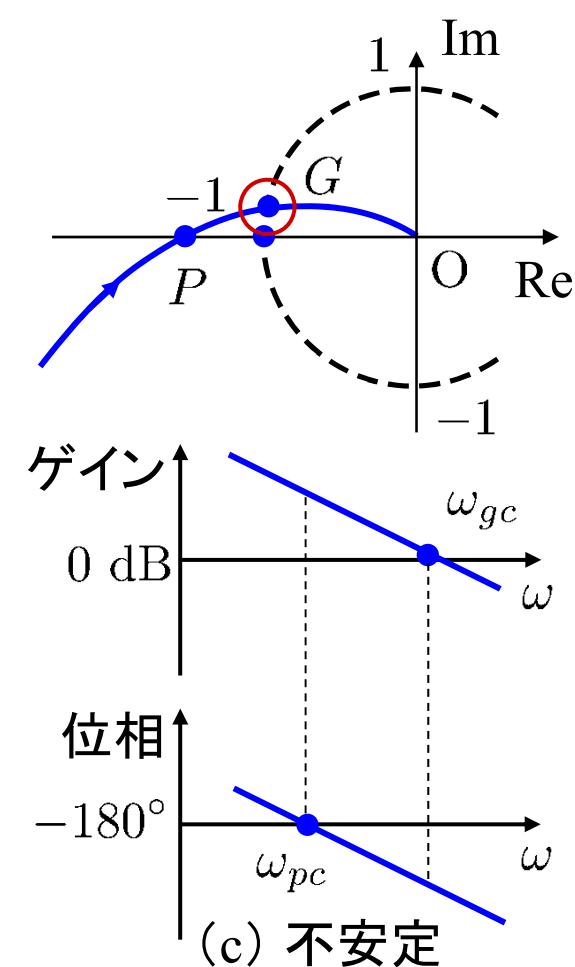
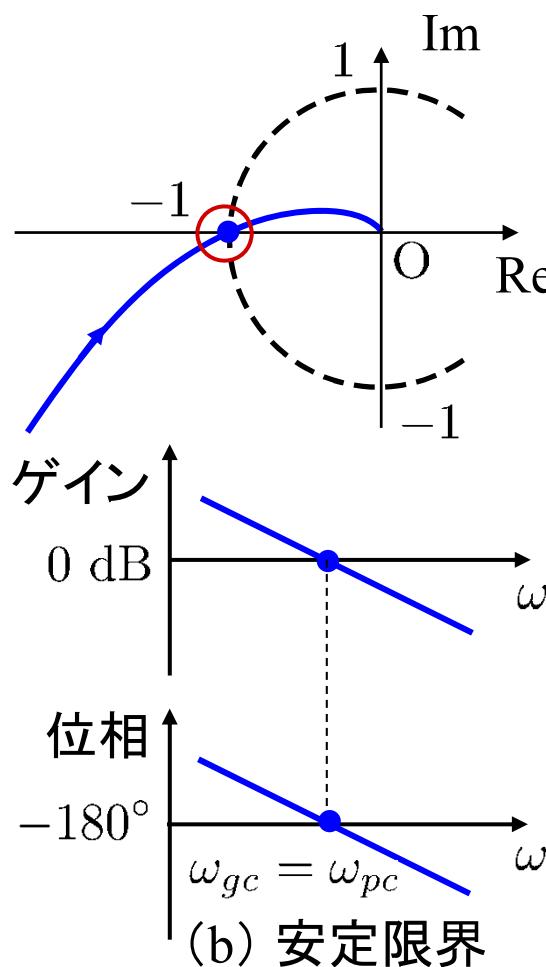
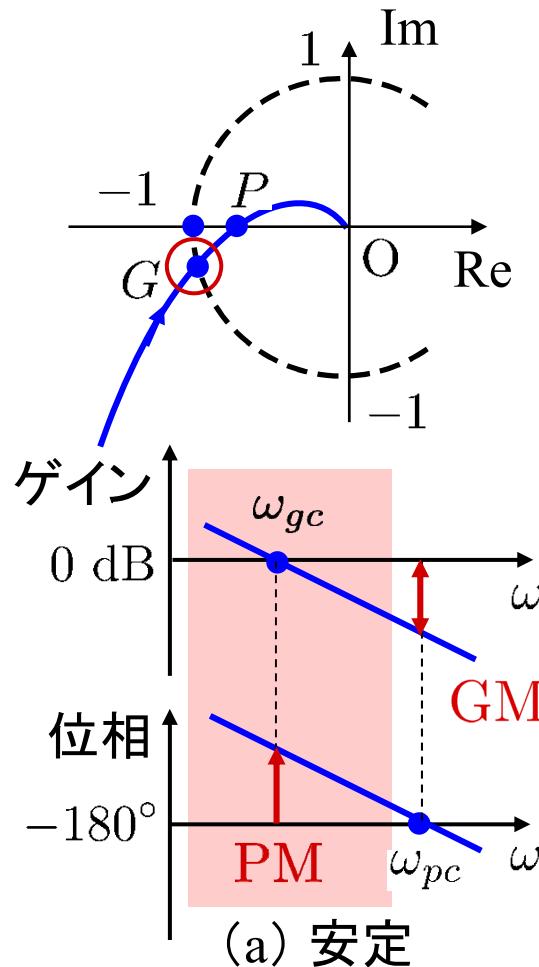
$GM = \infty$

ゲインは大きくしても安定だが、  
小さくすると不安定になる

## ボード線図での読み取り

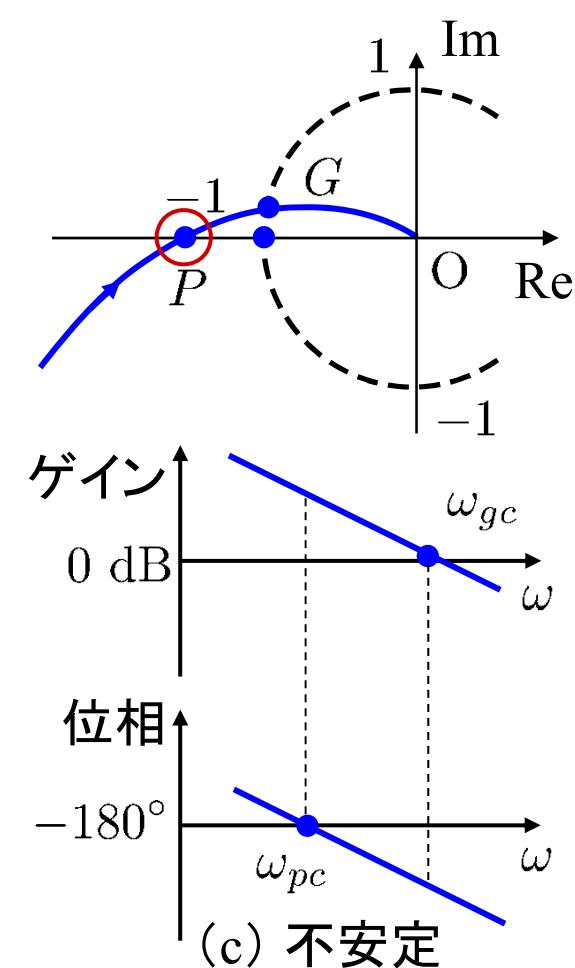
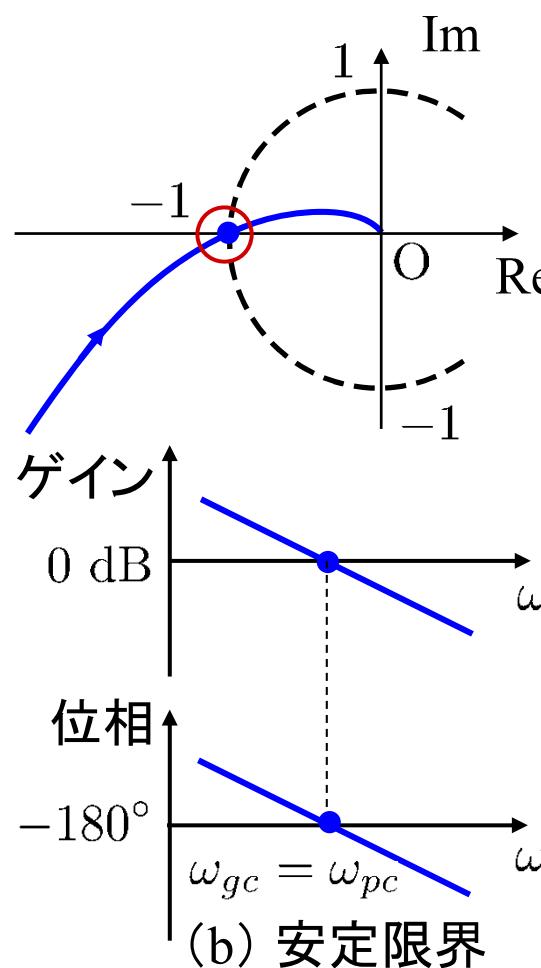
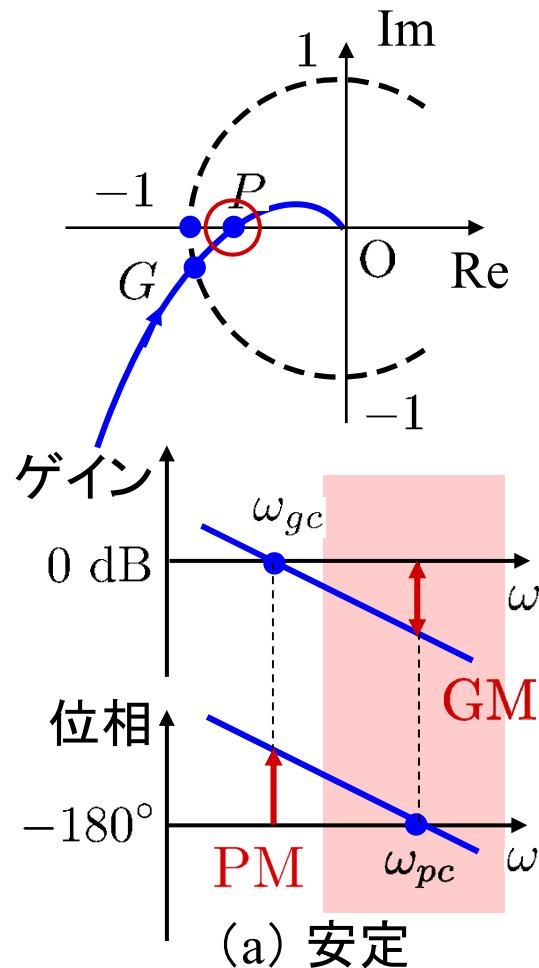
- (a) 位相が  $-180^\circ$  より進む  $\Rightarrow$  安定
- (b) 位相が  $-180^\circ$  ちょうど  $\Rightarrow$  安定限界
- (c) 位相が  $-180^\circ$  より遅れる  $\Rightarrow$  不安定

ゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  で PM を読み取る。



- (a) ゲインが 0 dB より低い  $\Rightarrow$  安定
- (b) ゲインが 0 dB ちょうど  $\Rightarrow$  安定限界
- (c) ゲインが 0 dB より高い  $\Rightarrow$  不安定

位相交差周波数  $\omega_{pc}$  で GM を読み取る。



## [例 6.6] (虚軸上有極がある場合)

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (K=3)$$

ゲイン交差周波数

$$\omega_{gc} \simeq 0.97$$

位相余裕

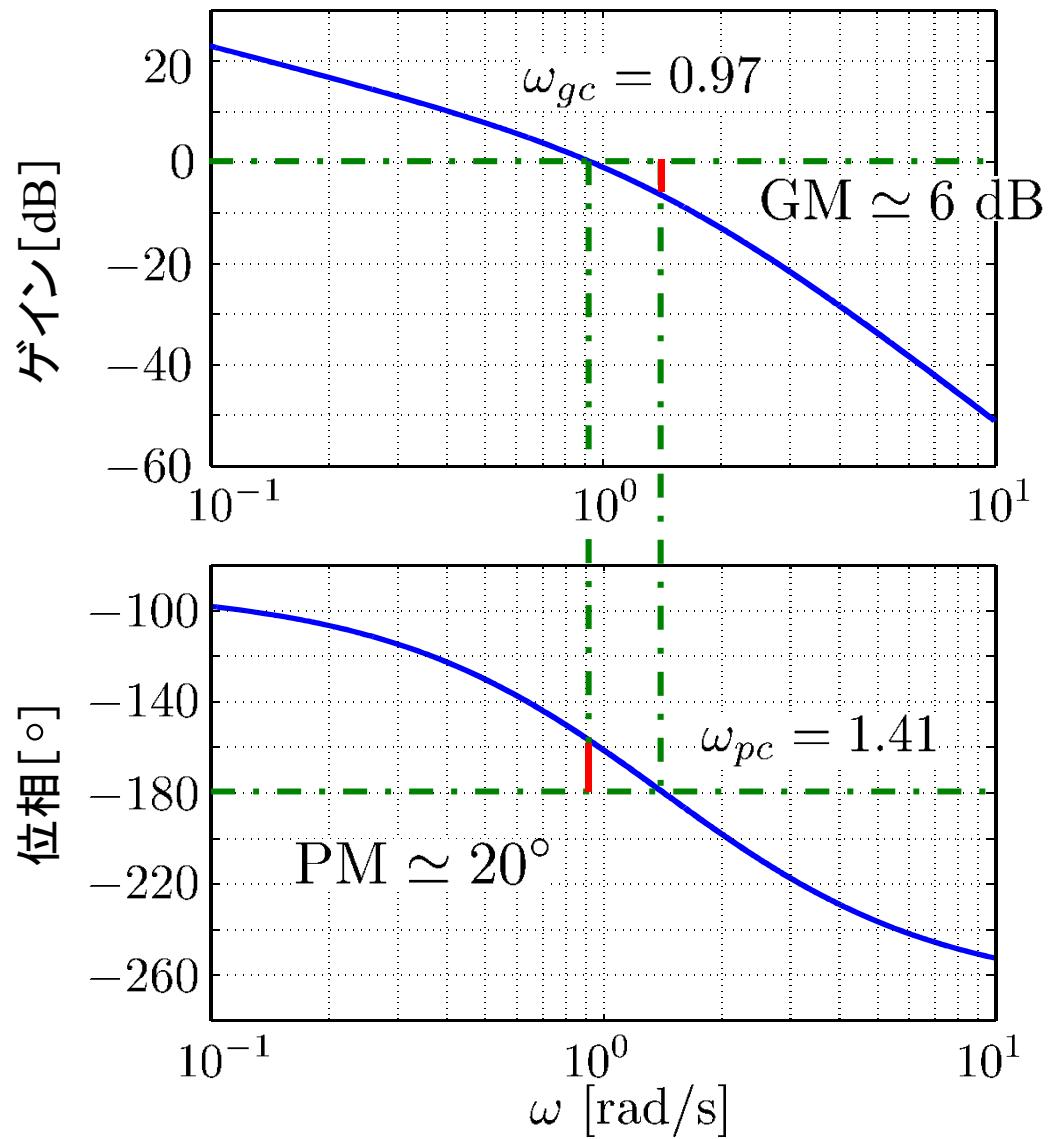
$$PM \simeq 20^\circ$$

位相交差周波数

$$\omega_{pc} \simeq 1.41$$

ゲイン余裕

$$GM \simeq 6 \text{ dB}$$



# 第6章：フィードバック制御系の安定性

## 6.3 ゲイン余裕, 位相余裕

キーワード：位相交差周波数, ゲイン交差周波数,  
位相余裕, ゲイン余裕

学習目標：安定性の程度を評価するゲイン余裕や  
位相余裕について理解する。