

第5章：周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード：周波数伝達関数, ゲイン, 位相

学習目標：システムの周波数応答特性を理解する。

1

5 周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

線形システム(安定な LTI システム)

(一定周波数の)正弦波を入力として加え続けると、定常状態ではその出力も入力と同じ周波数の正弦波になる。

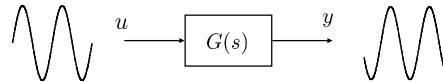
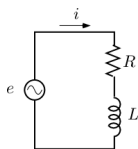


図 5.1 周波数応答

2

[例] RL直列回路

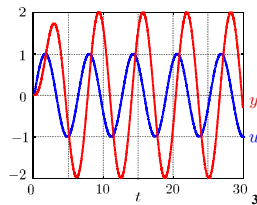
$$I = \frac{E}{R + j\omega L} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \angle -\theta$$



(出力)電流 i は、(入力)電圧 e に対して
振幅 $\frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ だけ増幅され

位相 $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$ だけ遅れる

入力と出力は同じ周波数, 異なるのは振幅と位相だけ



3

周波数特性

入力の周波数を変化させた ($\omega: 0 \sim \infty$) とき
振幅と位相がどのように変化するか

伝達関数 $G(s)$

極 $p_i (i = 1 \sim n)$ は安定 ($\text{Re}[p_i] < 0$) で, すべて異なる。

(例) 安定と不安定

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} \quad p_i = 1 \pm j2 \quad \text{Re}[p_i] = 1 \quad \text{不安定}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \quad p_i = -1 \pm j2 \quad \text{Re}[p_i] = -1 \quad \text{安定}$$

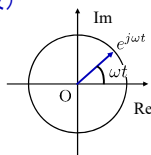
4

(仮想的な)複素数の入力 (複素正弦波)

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\left(\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \right) \quad (\text{p. 192 参照})$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s-j\omega}$$



出力

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s-j\omega} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_0}{s-j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} \right]$$

$$= K_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

$G(s)$ の安定性 ($\text{Re}[p_i] < 0$) より $e^{p_i t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$

5

$$Y(s) = \sum_i \frac{Y_i}{s-\alpha_i} \quad Y_i = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s-\alpha_i) Y(s) \quad (\text{留数})$$

よって

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s-j\omega) \left[G(s) \frac{1}{s-j\omega} \right]$$

$$= G(j\omega)$$

$$= |G(j\omega)| e^{j\phi} \quad \phi = \angle G(j\omega)$$



上記の留数は、実数で考える部分分数展開の係数と同じ

$$(\text{例}) G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = (s+1)G(s)|_{s=-1} = \frac{1}{-1+2} = 1$$

$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$ の計算は、極座標表示した

$$(\text{例}) G(j\omega) = 1 + j\sqrt{3} = 2 \angle 60^\circ$$

6

$$y(t) = \underbrace{K_0 e^{j\omega t}}_{G(j\omega)} + \sum_{i=1}^n \underbrace{K_i e^{p_i t}}_{e^{p_i t} \rightarrow 0}$$

入力	出力
$\cos \omega t$	$ G(j\omega) \cos(\omega t + \phi)$
$\sin \omega t$	$ G(j\omega) \sin(\omega t + \phi)$

$$y(t) = G(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$= |G(j\omega)| e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$y(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi) + j|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

振幅の変化 $|G(j\omega)|$ **ゲイン**
 位相の差 $\angle G(j\omega)$ **位相(位相差)**

[例] $G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1}$, $u(t) = \sin t$ ($\omega = 1$)

ゲイン
 $|G(j)| = \left| \frac{2}{j^2 + j + 1} \right| = \left| \frac{2}{-1 + j + 1} \right| = \left| \frac{2}{j} \right| = 2$

位相
 $\angle G(j) = \angle \frac{2}{j} = \angle 2 - \angle j = 0 - 90^\circ = -90^\circ$
 $\equiv 0^\circ$ + 方向に位相を考える

$y(t) = 2 \sin(t - 90^\circ)$

複素平面上のベクトル $G(j)$

周波数伝達関数 $G(j\omega)$
 $G(s)$ の s を $j\omega$ で置き換えたもの

$G(j\omega) = \frac{e^{j\omega t}$ に対する定常応答 $e^{j\omega t}$

$y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega)$

- 実用的な制御系の解析・設計に役立つ。
- 実験的に測定し、求めることができる。
- 不安定系でも(形式的に)定義できる。

システムが安定
 ゲインと位相から求めることができる

$$y(t) = \underbrace{K_0 e^{j\omega t}}_{G(j\omega)} + \sum_{i=1}^n \underbrace{K_i e^{p_i t}}_{e^{p_i t} \rightarrow 0}$$

システムが不安定
 $u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$
 逆ラプラス変換を用いて求める

第5章：周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード：周波数伝達関数, ゲイン, 位相

学習目標：システムの周波数応答特性を理解する。