

# 第 5 章 : 周波数応答

## 5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード : 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

学習目標 : システムの周波数応答特性を理解する。

## 5 周波数応答

### 5.1 周波数応答と伝達関数

#### 線形システム(安定な LTI システム)

(一定周波数の)正弦波を入力として加え続けると、定常状態ではその出力も入力と同じ周波数の正弦波になる。

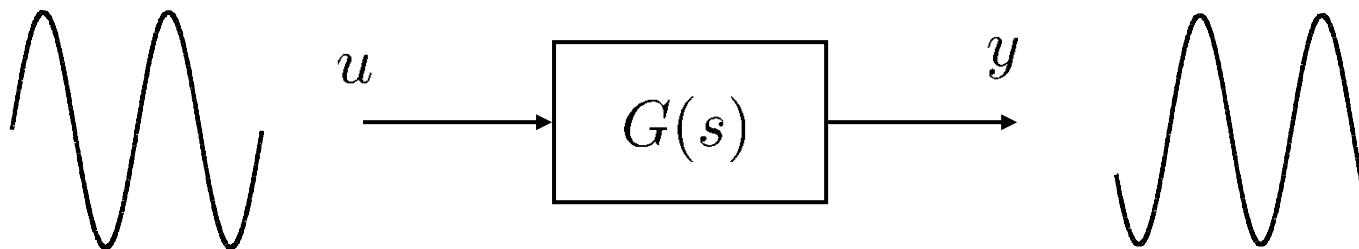
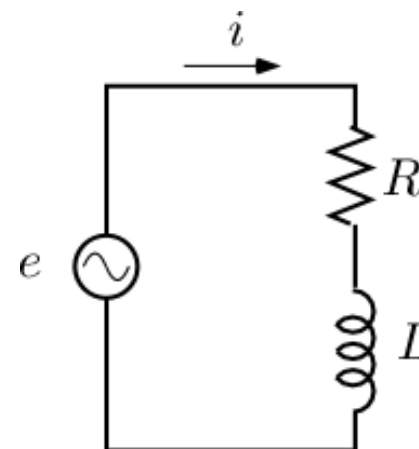


図 5.1 周波数応答

## [例] RL直列回路

$$I = \frac{E}{R + j\omega L}$$
$$= \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle \theta} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \angle -\theta$$

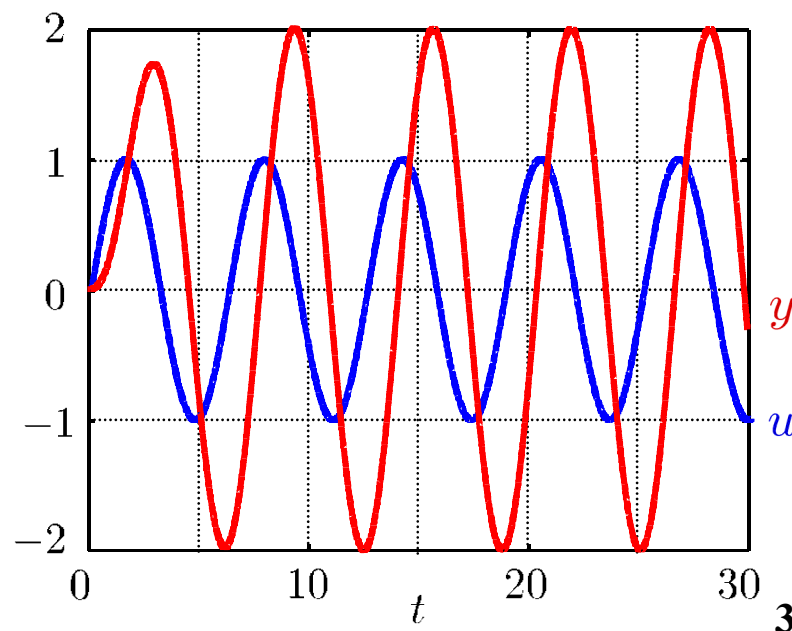


(出力)電流  $i$  は, (入力)電圧  $e$  に対して

振幅  $\frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$  だけ増幅され

位相  $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$  だけ遅れる

入力と出力は同じ周波数, 異なるのは振幅と位相だけ



## 周波数特性

入力の周波数を変化させた( $\omega : 0 \sim \infty$ )とき  
振幅と位相がどのように変化するか

## 伝達関数 $G(s)$

極  $p_i (i = 1 \sim n)$  は安定 ( $\text{Re}[p_i] < 0$ ) で、すべて異なる。

## (例) 安定と不安定

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} \quad p_i = 1 \pm j2 \quad \text{Re}[p_i] = 1 \quad \text{不安定}$$

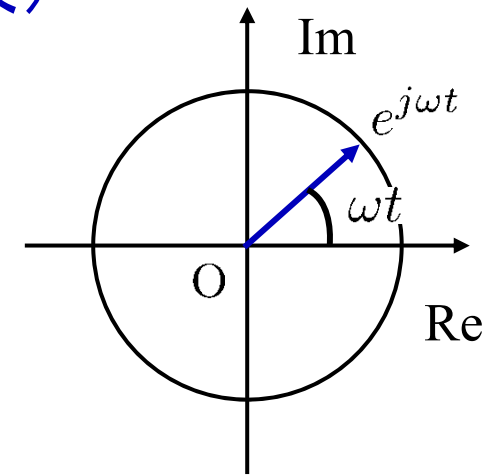
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \quad p_i = -1 \pm j2 \quad \text{Re}[p_i] = -1 \quad \text{安定}$$

## (仮想的な)複素数の入力 (複素正弦波)

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\left( \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \right) \quad (\text{p. 192 参照})$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s - j\omega}$$



## 出力

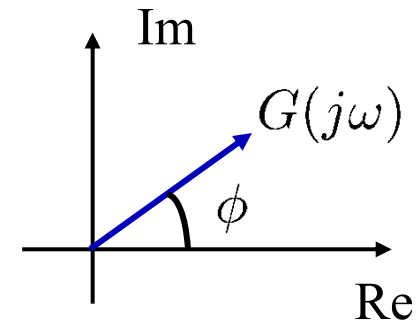
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s - j\omega} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \right] \\ &= K_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \end{aligned}$$

$G(s)$  の安定性 ( $\text{Re}[p_i] < 0$ ) より  $e^{p_i t} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ )

$$Y(s) = \sum_i \frac{Y_i}{s - \alpha_i} \quad Y_i = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i)Y(s) \quad (\text{留数})$$

よって

$$\begin{aligned} K_0 &= \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \left[ G(s) \frac{1}{s - j\omega} \right] \\ &= G(j\omega) \\ &= |G(j\omega)|e^{j\phi} \quad \phi = \angle G(j\omega) \end{aligned}$$



上記の留数は、実数で考える部分分数展開の係数と同じ

$$(\text{例}) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = (s+1)G(s)|_{s=-1} = \frac{1}{-1+2} = 1$$

$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$  の計算は、極座標表示した

$$(\text{例}) \quad G(j\omega) = 1 + j\sqrt{3} = 2\angle 60^\circ$$

$$y(t) = \underbrace{K_0 e^{j\omega t}}_{G(j\omega)} + \sum_{i=1}^n \underbrace{K_i e^{p_i t}}_{e^{p_i t} \rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= G(j\omega) e^{j\omega t} \\ &= |G(j\omega)| e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \\ &= |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \phi)} \end{aligned}$$

入力	出力
$\cos \omega t$	$ G(j\omega)  \cos(\omega t + \phi)$
$\sin \omega t$	$ G(j\omega)  \sin(\omega t + \phi)$

$$y(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi) + j |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

振幅の変化  $|G(j\omega)|$     **ゲイン**

位相の差  $\angle G(j\omega)$     **位相(位相差)**

[例]  $G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1}, \quad u(t) = \sin t$   
 $(\omega = 1)$

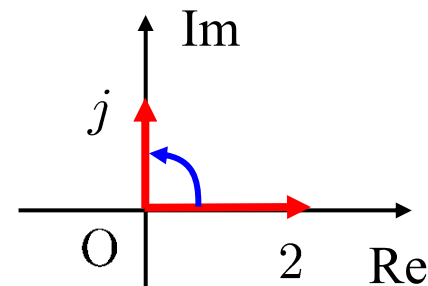
ゲイン

$$|G(j)| = \left| \frac{2}{j^2 + j + 1} \right| = \left| \frac{2}{-1 + j + 1} \right| = \left| \frac{2}{j} \right| = 2$$

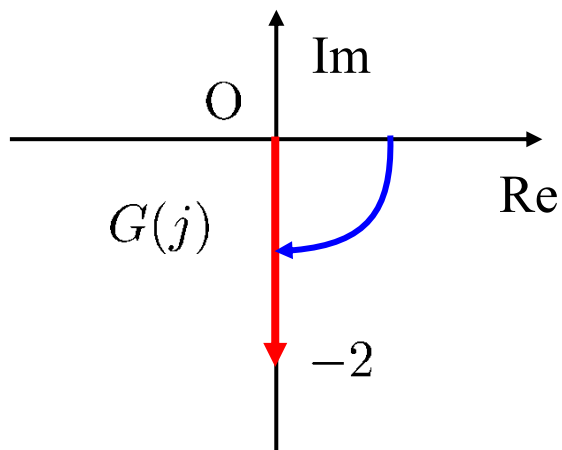
位相

$$\angle G(j) = \angle \frac{2}{j} = \angle 2 - \angle j = 0 - 90^\circ = -90^\circ$$

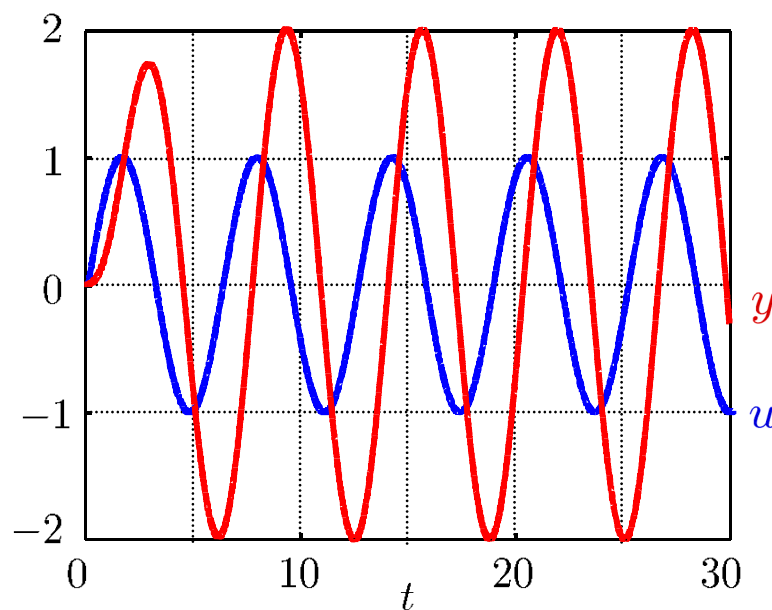
$= 0^\circ$  +方向に位相を考える



$$y(t) = 2 \sin(t - 90^\circ)$$



複素平面上的のベクトル  $G(j)$



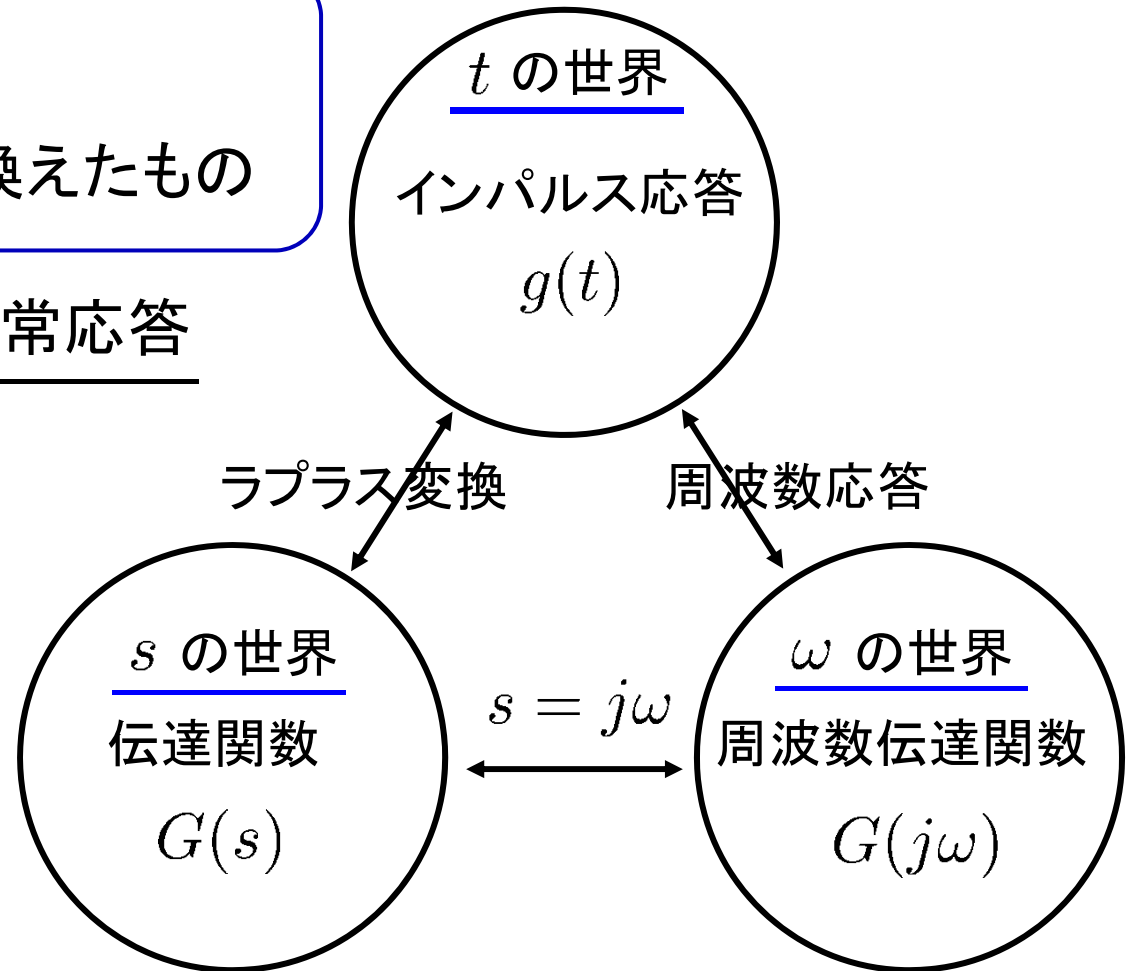


## 周波数伝達関数 $G(j\omega)$

$G(s)$  の  $s$  を  $j\omega$  で置き換えたもの

$$G(j\omega) = \frac{e^{j\omega t} \text{ に対する定常応答}}{e^{j\omega t}}$$

$$y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega)$$



- 実用的な制御系の解析・設計に役立つ。
- 実験的に測定し、求めることができる。
- 不安定系でも(形式的に)定義できる。

## システムが安定

ゲインと位相から求めることができる

$$y(t) = \underbrace{K_0 e^{j\omega t}}_{G(j\omega)} + \sum_{i=1}^n K_i \underbrace{e^{p_i t}}_{e^{p_i t} \rightarrow 0}$$

## システムが不安定

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

逆ラプラス変換を用いて求める

# 第 5 章 : 周波数応答

## 5.1 周波数応答と伝達関数

キーワード : 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

学習目標 : システムの周波数応答特性を理解する。