

第 5 章 : 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード : ゲイン曲線, 位相曲線, 最小位相系,
ゲインー位相関係式

学習目標 : 高次系のボード線図を描くことができる。
最小位相系におけるゲインと位相の関
係について理解する。

5 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

ゲインと位相の関係

[例]

$$G_1(s) = \frac{1+s}{s^2+s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

ゲイン

$$\begin{aligned} |G_1(j\omega)| &= \frac{|1+j\omega|}{|(j\omega)^2+j\omega+1|} = \frac{|1+j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{|1-\omega^2+j\omega|} \\ &= \frac{|1-j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = |G_2(j\omega)| \end{aligned} \quad \text{同じ}$$

位相

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

異なる

$$\omega = 0$$

$$\angle G_1(0) = \angle G_2(0) = 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty$$

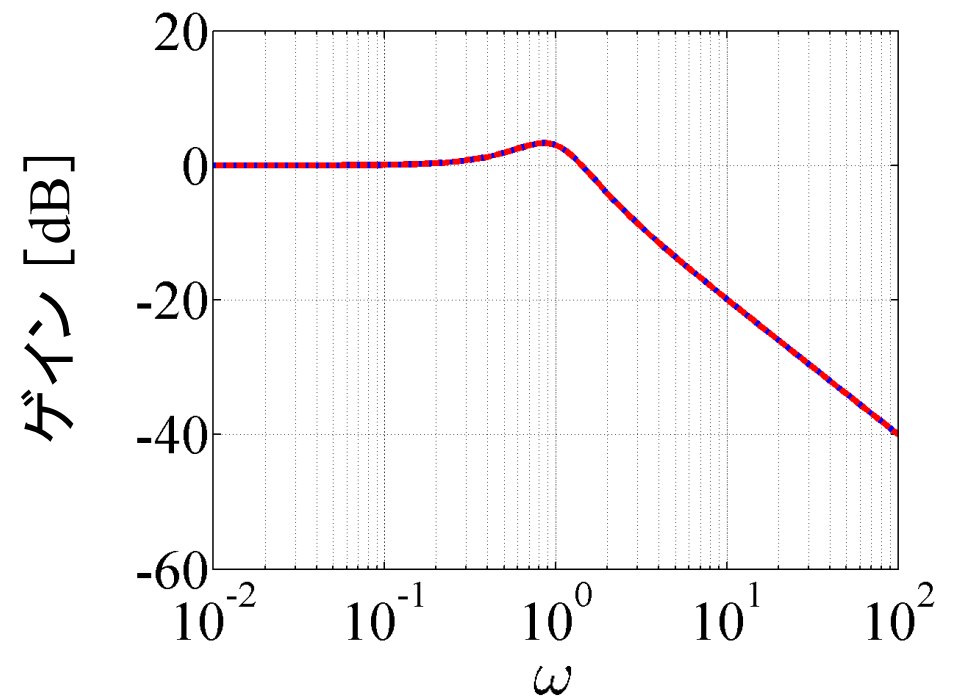
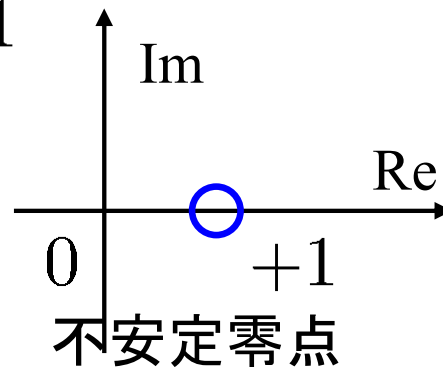
$$\begin{aligned} \angle G_1(j\omega) &\approx \angle j\omega - \angle(-\omega^2) \\ &= 90^\circ - 180^\circ = -90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle G_2(j\omega) &\approx \angle(-j\omega) - \angle(-\omega^2) \\ &= \underline{-90^\circ} - 180^\circ = -270^\circ \end{aligned}$$

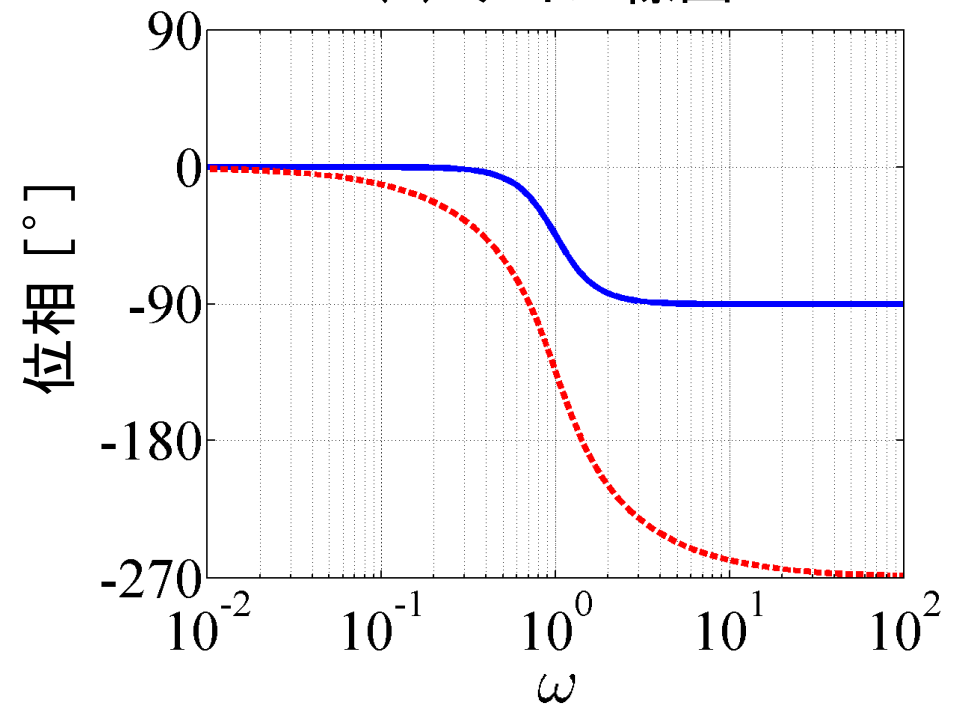
不安定零点の場合
位相の取り方に注意

位相が遅れる

$$G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$



(a) ゲイン線図



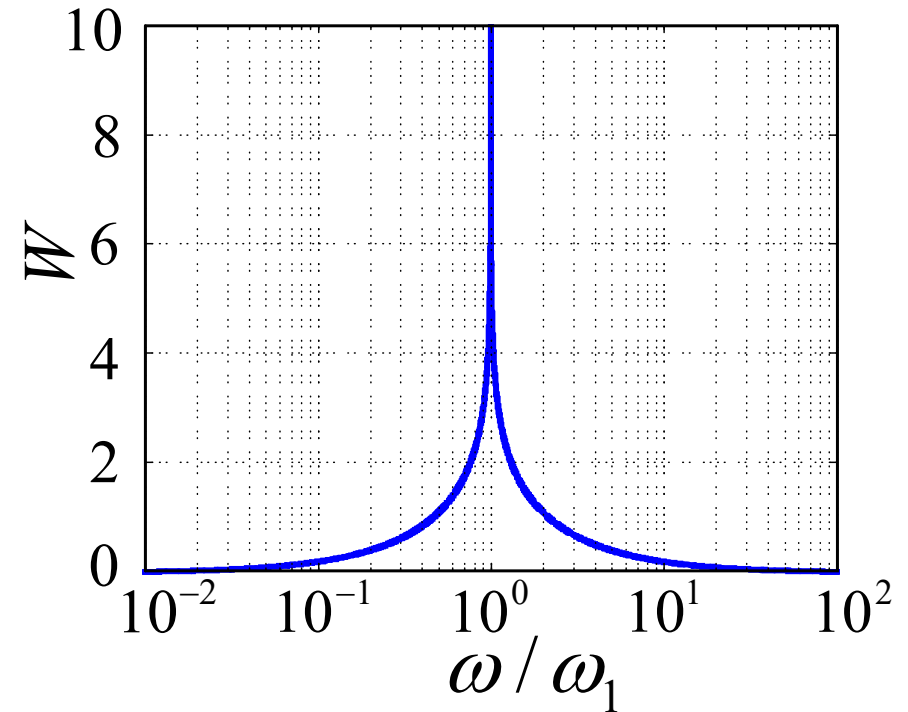
(b) 位相線図

最小位相系 安定なシステムでかつ不安定零点をもたない

ゲインから位相が一意に定まる。
(ボードのゲイン - 位相関係式)

$$\angle G(j\omega_1) = \frac{180}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dM}{du} W du \quad (^\circ) \text{度}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \ln(\omega/\omega_1) & \text{正規化角周波数} \\ M = \ln|G(j\omega)| & \text{対数ゲイン} \\ W = \ln(\coth(|u|/2)) & \text{重み関数} \end{array} \right.$$



$\frac{dM}{du}$ 横軸, 縦軸を自然対数目盛りとしたときのゲイン曲線の傾き

$$\int_{-\infty}^{\infty} W du = \frac{\pi^2}{2} \quad (\omega = \omega_1 \text{ でピーク})$$

(dM/du 一定のとき)

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega_1) &\approx \frac{dM}{du} \frac{180}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} W du \\ &= \frac{dM}{du} \frac{180}{\pi^2} \frac{\pi^2}{2} = \frac{dM}{du} \times 90^\circ \\ &= n \times 90^\circ\end{aligned}$$

$n = -1$ のとき

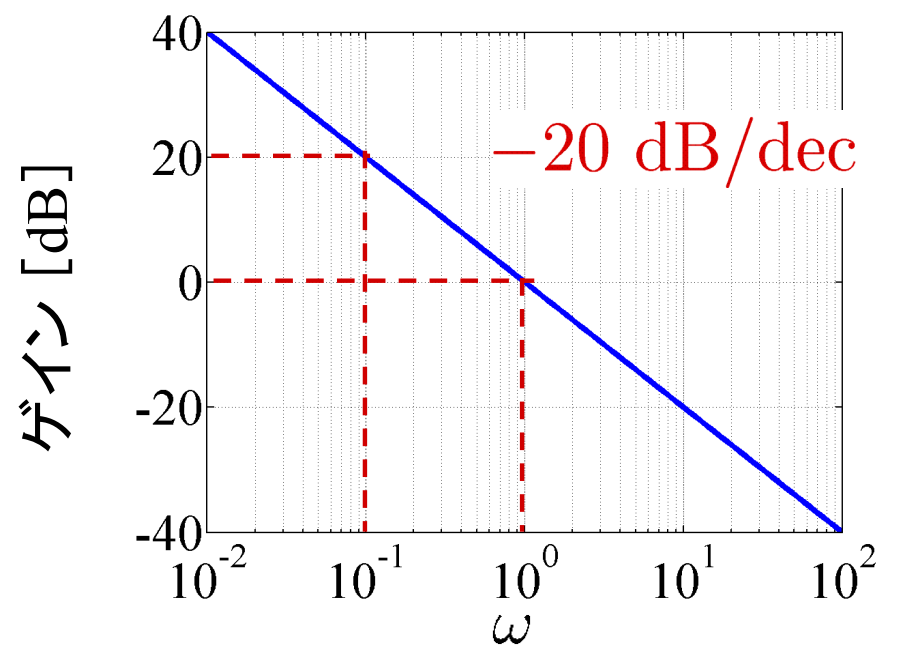
$$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1 \quad \text{で} \quad \frac{dM}{du} = -1$$

とすると

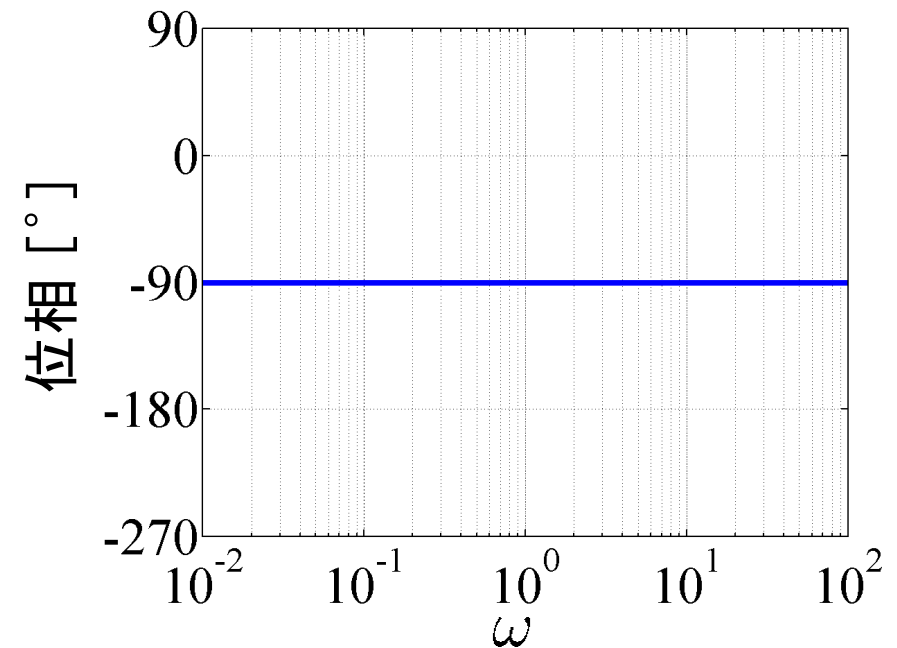
$$-20 \text{ dB/dec} \Rightarrow \angle G(j\omega_1) \approx -90^\circ$$

積分系

1 次系 (高周波域)



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

$n = -2$ のとき

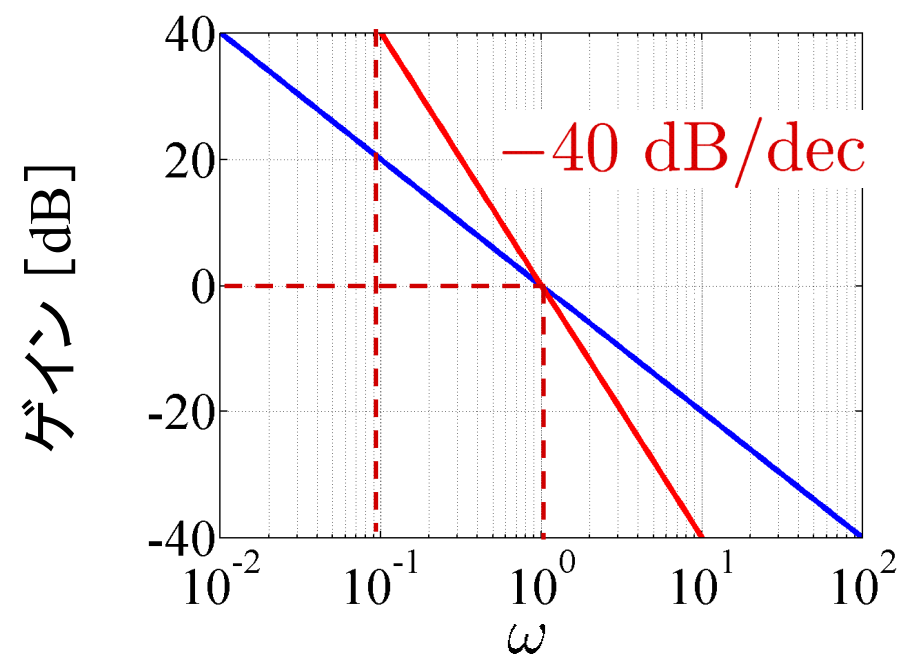
$$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1 \text{ で } \frac{dM}{d\omega} = -2$$

とすると

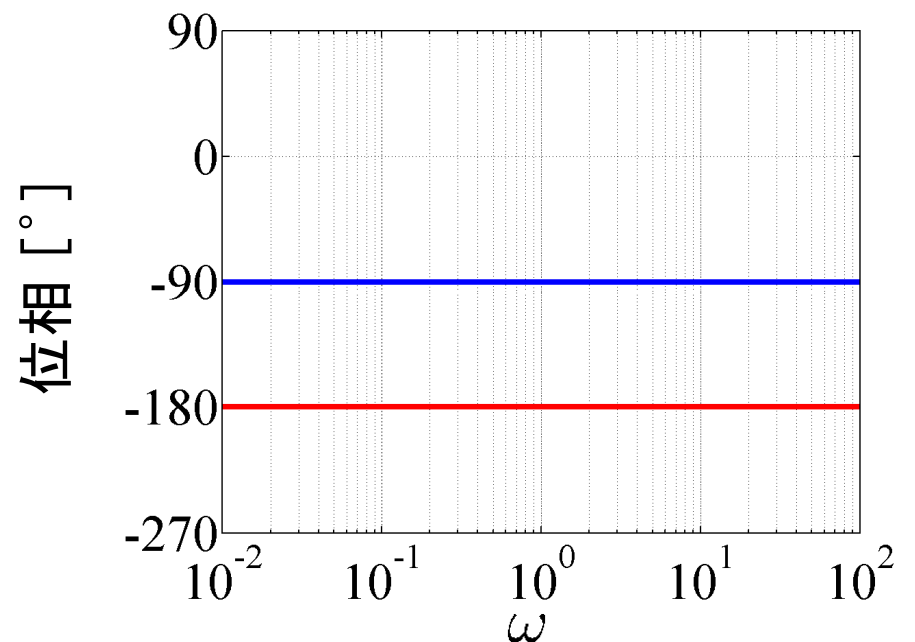
$$-40 \text{ dB/dec} \Rightarrow \angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ$$

2 重積分系

2 次系 (高周波域)



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

5 周波数応答

5.4 ボード線図の性質

ボード線図の利点

極形式で表示

[アイデア] ゲイン: 対数スケール

位相: 線形スケール

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \quad (\text{直列結合})$$

$$G_i(j\omega) = r_i e^{j\theta_i} \quad (i = 1 \sim 3) \text{ とおく}$$

$$G(j\omega) = (r_1 e^{j\theta_1}) (r_2 e^{j\theta_2}) (r_3 e^{j\theta_3})$$

$$= \frac{r_1 r_2 r_3}{= r} e^{j \frac{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}{= \theta}}$$

$$= r e^{j\theta}$$

$$G(j\omega) = re^{j\theta} = r_1 r_2 r_3 e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}$$

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log r = 20 \log(r_1 r_2 r_3) \\ &= 20 \log r_1 + 20 \log r_2 + 20 \log r_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 20 \log r_i = \sum_{i=1}^3 20 \log |G_i(j\omega)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \theta_i = \sum_{i=1}^3 \angle G_i(j\omega) \end{aligned}$$

直列結合のとき、ゲインと位相を単純に加えあわせればよい

ゲイン K 倍しても(形を変えず)
縦軸方向に平行移動(ゲインのみ)

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \quad (T = 1)$$

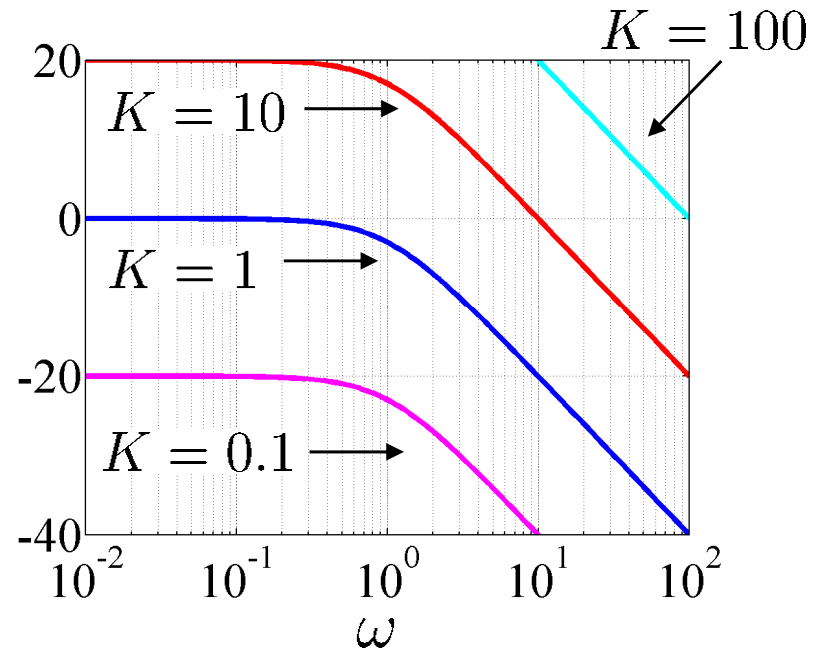
$+40 \text{ [dB]} \quad (\times 100)$
 $\quad \quad \quad K = 0.1$
 $\quad \quad \quad K = 1$
 $\quad \quad \quad K = 10$
 $+20 \text{ [dB]} \quad (\times 10)$

$$G_1(j\omega) = \frac{0.1}{1 + j\omega}$$

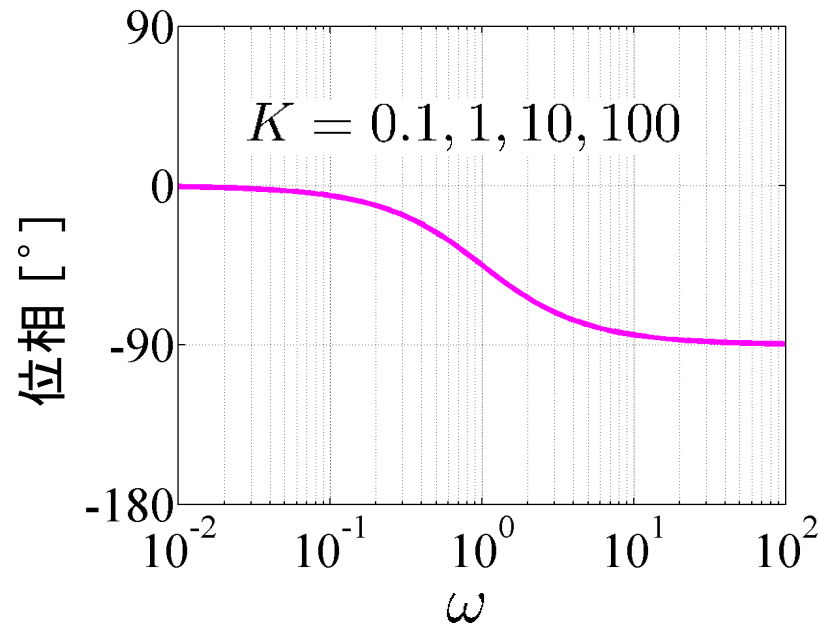
$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = 10G_1$$

$$|G_2| = 20 \log 10 + 20 \log G_1$$

$$\angle G_2 = \angle 10 + \angle G_1 = \angle G_1$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

$G^{-1}(s)$ (逆システム) のボード線図

ゲイン

$$20 \log \left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| = -20 \log |G(j\omega)|$$

位相

$$\angle \frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

逆システムでは、ゲインと位相の符号を反転

表 5.1 基本要素のボード線図

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K		
s		
$\frac{1}{s}$		
$Ts + 1$		
$\frac{1}{Ts + 1}$		
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$		

[例 5.1]

$$G(s) = \frac{100(s + 1)}{s(s + 10)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s)$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{0.1s + 1} \cdot (s + 1)$$

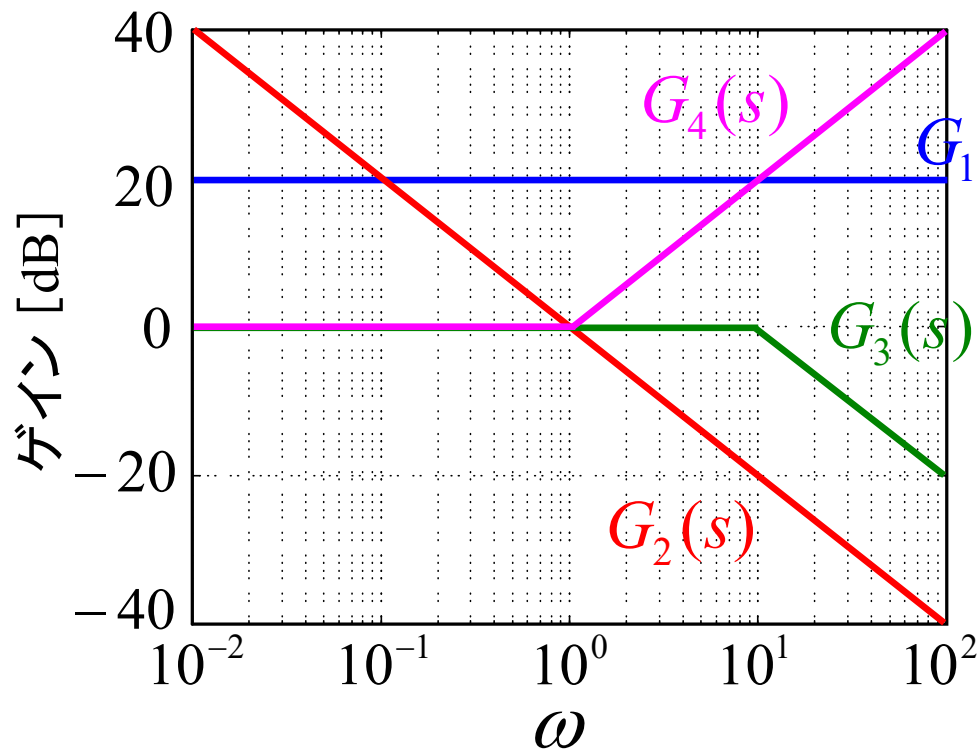


図 5.12 各要素のゲイン線図
(折れ線近似)

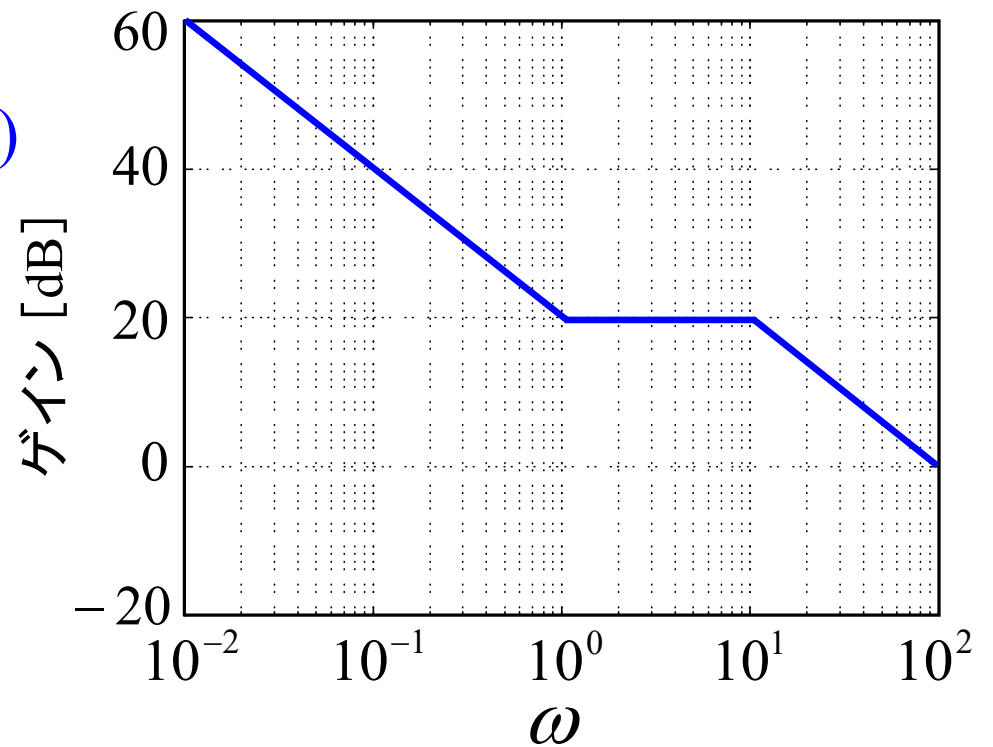
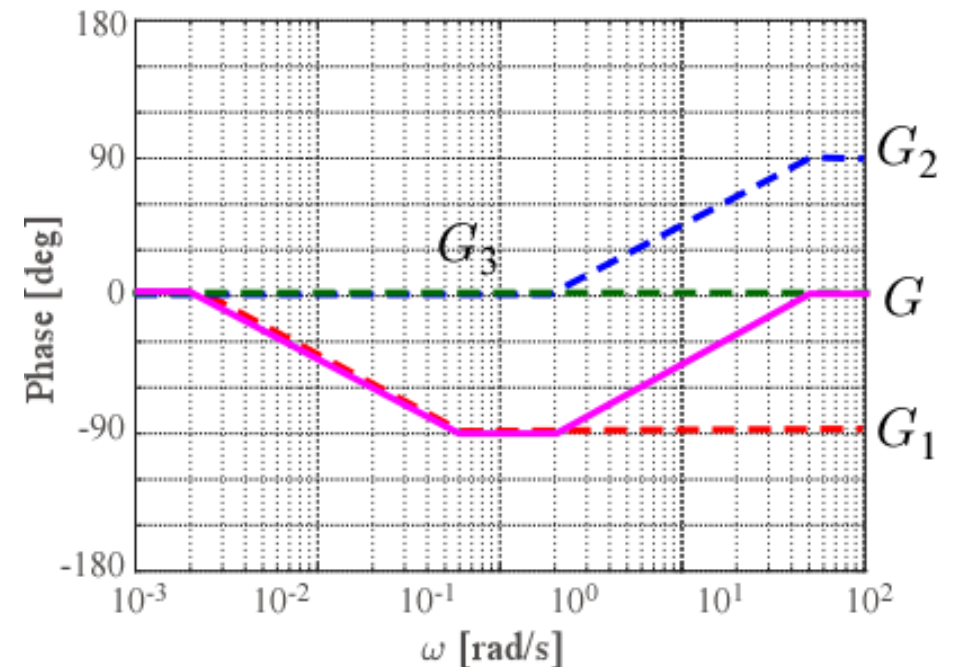
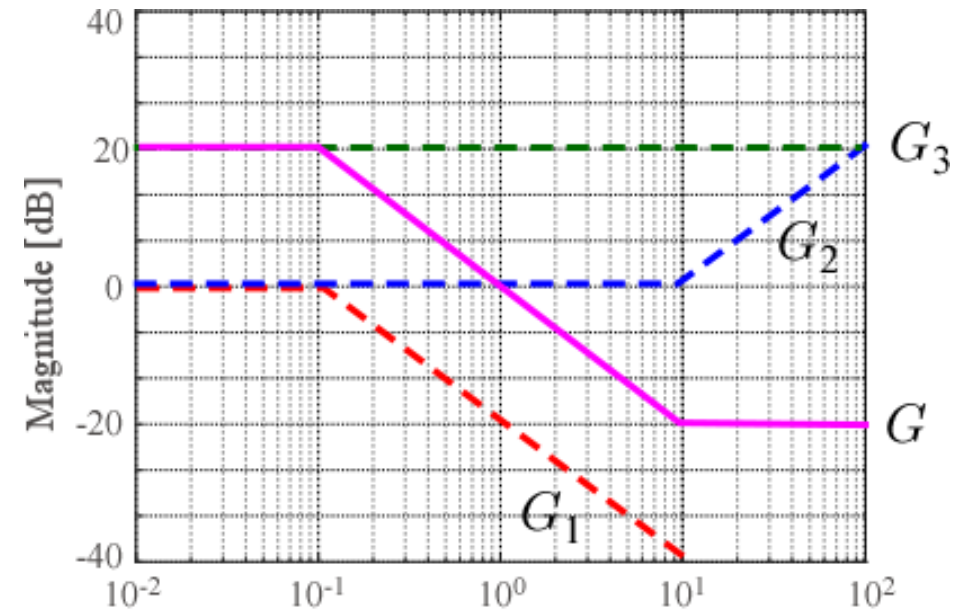


図 5.13 $G(s)$ のゲイン線図
(折れ線近似)

5章演習問題【5】(b)

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{s + 10}{10s + 1} = \left(\frac{1}{10s + 1} \right) \cdot (s + 10) \\
 &= \underbrace{\left(\frac{1}{10s + 1} \right)}_{G_1(s)} \cdot \underbrace{(0.1s + 1)}_{G_2(s)} \cdot \underbrace{10}_{G_3(s)}
 \end{aligned}$$

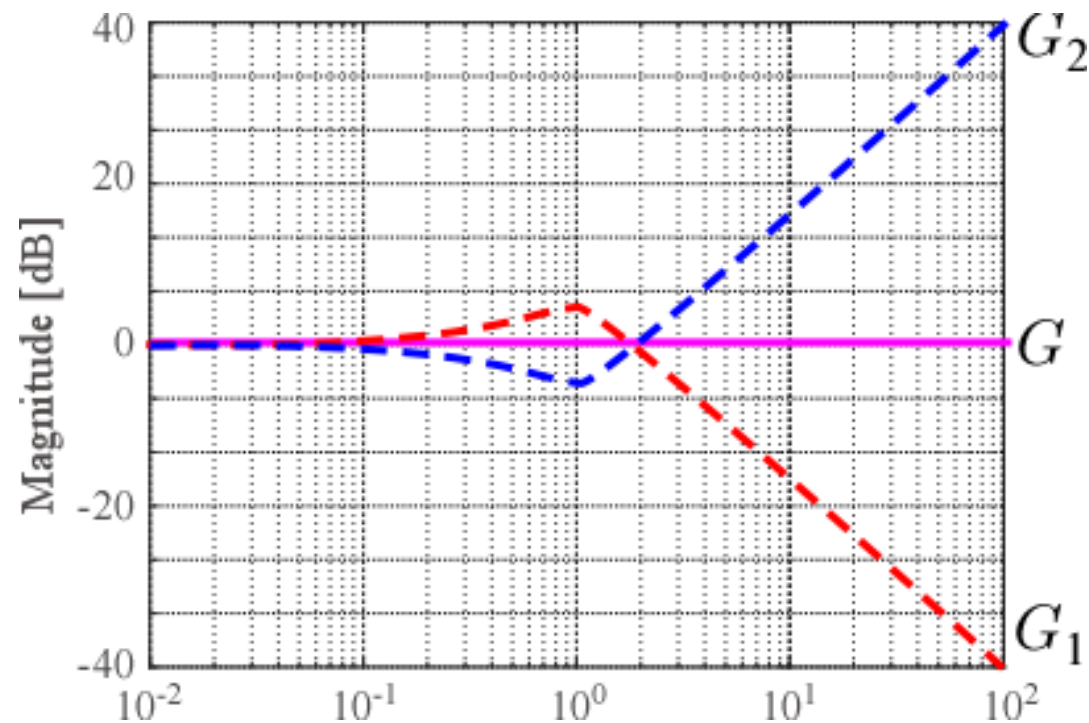
	T	$1/T$	$0.2/T$	$5/T$
$G_1(s)$	10	0.1	0.02	0.5
$G_2(s)$	0.1	10	2	50



5章演習問題【6】(c)

$$\frac{s^2 - 3s + 1}{s^2 + 3s + 1}$$

$$G(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{s^2 + 3s + 1} = \underbrace{(s^2 - 3s + 1)}_{G_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2 + 3s + 1}}_{G_2(s)}$$



ボード線図の利点

- システムを直列結合したもののボード線図は各システムのボード線図を単に加え合わせるだけで得られる.
- 折れ線近似が容易で, システムの概略特性を簡単に精度よく把握できる.
- 最小位相系では, ゲイン曲線から位相曲線の概略がわかる.
- 広い周波数帯域を1枚の図面で扱える.
- 実験データからボード線図を描くことも容易である.

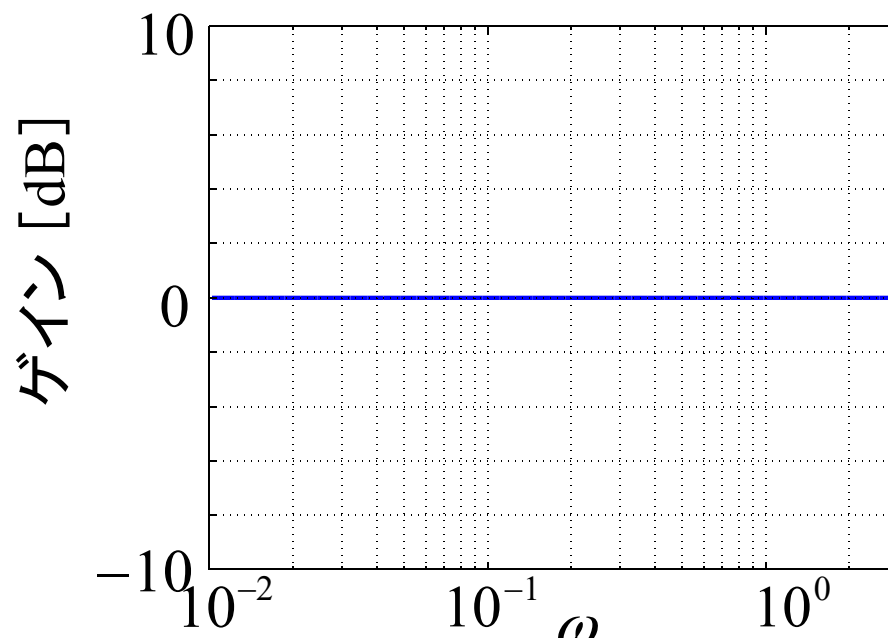
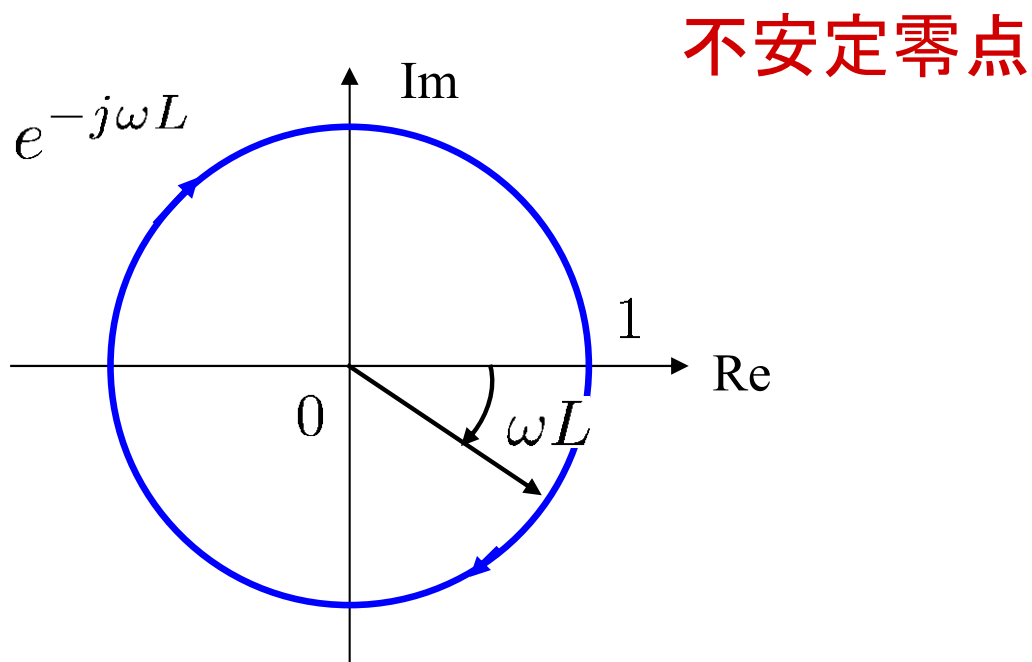
むだ時間要素

$$G(s) = e^{-sL}$$

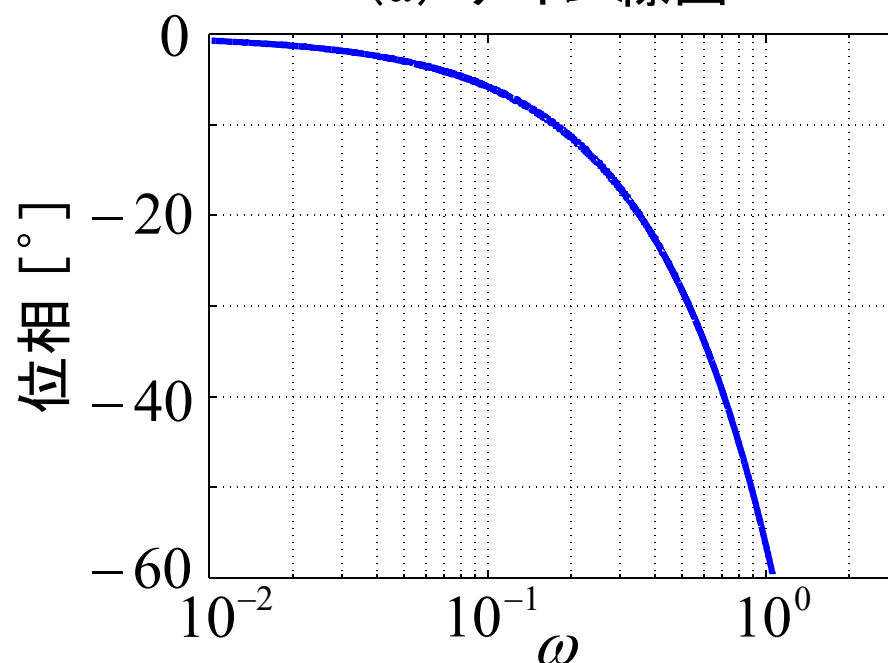
パデー近似

$$e^{-sL} \approx \frac{1 - Ls/2}{1 + Ls/2}$$

$$e^{-sL} \approx \frac{1 - Ls/2 + (Ls)^2/12}{1 + Ls/2 + (Ls)^2/12}$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

第5章：周波数応答

5.4 ボード線図の性質

キーワード：ゲイン曲線，位相曲線，最小位相系，
ゲイン－位相関係式

学習目標：高次系のボード線図を描くことができる。
最小位相系におけるゲインと位相の関
係について理解する。