

第6章:フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード: ナイキストの安定判別法

学習目標: ナイキストの安定判別法を理解し、フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる。

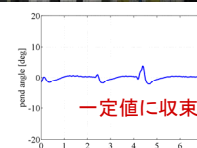
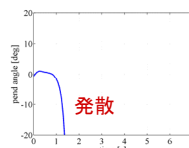
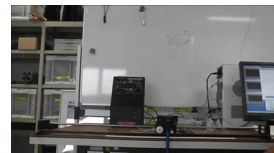
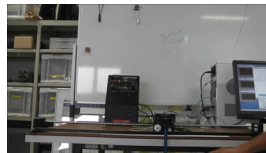
1

6 フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

安定とは 一定値に落ち着く

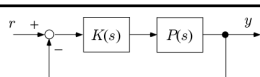
【例】倒立振り子システム



2

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$K(s) = 30$$



極の実部が負
閉ループ系

$$G(s) = \frac{y}{r} = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)+30}$$

= 0 の解
(短所) 計算に手間がかかる

ラウス=フルビッツの安定判別法

$$G(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)+30}$$

すべての係数が正
ラウス数列, またはフルビッツの行列式が正
(短所) 次数が高いと手間がかかる

3

内部安定性

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$$

$$K(s) = 30 = \frac{30}{1} = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$\phi(s) = D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s) = (s+1)(s+2)(s+3)+30 = 0 \text{ の解}$$

(長所) 閉ループ $G(s) = \frac{y}{r} = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$ を計算しなくてよい

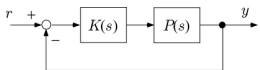
(短所) 計算に手間がかかる

ナイキストの安定判別法

閉ループ伝達関数の周波数応答に基づき図的に判別する

4

ナイキストの安定判別法



[1] 目的

$\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$: 開ループ系 $P(s)K(s)$ の極
 $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$: 閉ループ系(制御系)の極

内部安定性

$$1 + P(s)K(s) = 1 + \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \cdot \frac{N_K(s)}{D_K(s)} = \frac{D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)}{D_P(s)D_K(s)}$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2) \cdot (s-r_n)}{(s-p_1)(s-p_2) \cdot (s-p_n)} = \frac{\text{(閉ループ系の極)}}{\text{(開ループ系の極)}}$$

$\Pi = (\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \text{ の中で})$ 開ループ系の不安定極の数
知っている

$Z = (\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \text{ の中で})$ 閉ループ系の不安定極の数
知りたい

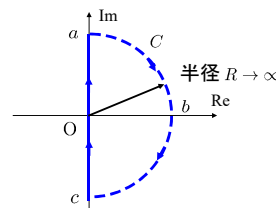
5

s を $0 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow 0$

と時計方向に1回転

$s = 0, j, j10, j\infty$

$-j\infty, -j100, -j10, -j, 0$



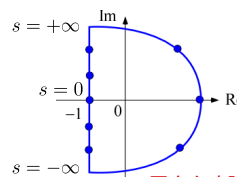
【例1】不安定(実部が正)の極

$$\phi(s) = D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s) = s - 1$$

$$\phi(0) = -1$$

$$\phi(j) = j - 1$$

$$\phi(j10) = j10 - 1$$



原点を時計周りに1周回る

6

【例2】安定(実部が負)の極

$\phi(s) = s + 1$
 $\phi(0) = 1$
 $\phi(j) = j + 1$
 $\phi(j10) = j10 + 1$

原点を時計周りに回っていない

原点を回ると不安定な極がある
よって

$$\angle(1 + P(s)K(s)) = \angle(s - r_1) + \dots + \angle(s - r_n)$$

N 回まわる Z 回まわる
(図から調べる) $-\angle(s - p_1) + \dots + \angle(s - p_n)$
 Π 回まわる (式から調べる)

$$N = Z - \Pi$$

$Z = N + \Pi$

$Z = 0$ ならば安定
 $D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$ に不安定極がない

$Z \neq 0$ ならば不安定

$\angle(1 + P(s)K(s))$ の回る回数の求め方

$P(s)K(s)$ が $(-1, 0)$ を回る $1 + P(s)K(s)$ が原点を回る

ナイキストの安定判別法

[ステップ 1] ベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 Γ を得る。

[ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1, 0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。
時計方向は+, 反時計方向は-とする。

[ステップ 3] $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを Π とする。

[ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。したがって、 $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定、 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

[例 6.2]

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, K(s) = 30$$

[ステップ 1] ベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 Γ を得る。

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{30}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{2+\omega^2}\sqrt{3+\omega^2}}$$

$$\omega = 0, |L(0)| = \frac{30}{1 \times 2 \times 3} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\angle L(0) = \angle 30 - \angle 3 = 0 - 0 = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty |L(\infty)| = \frac{30}{\infty} = 0$$

$$\angle L(\infty) = \angle 30 - \angle j^3 = 0 - (270^\circ) = -270^\circ$$

$$L(j\omega) = \frac{30}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$= \frac{30}{6 - 6\omega^2 + j\omega(-\omega^2 + 11)}$$

$\omega = 0, \pm\sqrt{11}$

$\omega = \sqrt{11}$ のとき

$$L(j\sqrt{11}) = \frac{30}{6 - 6 \times 11} > -1$$

[ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1, 0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。
時計方向は+, 反時計方向は-とする。

$N = 0$ 回っていない

[ステップ 3] $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを Π とする。

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$\Pi = 0$ 極: $-1, -2, -3$

[ステップ4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。
したがって、 $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定、
 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

$Z = N + \Pi = 0$ 閉ループ系の制御系は安定

13

[例 6.3] (不安定系の場合)

[ステップ1] ベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 Γ を得る。

$P(s) = \frac{1}{s-1}, K(s) = 2$

[ステップ1]

$L(s) = P(s)K(s) = \frac{2}{s-1}$

$\omega = 0, |L(0)| = \left| \frac{2}{0-1} \right| = 2$

$\angle L(0) = \angle 2 - \angle -1 = 0 - (180) = -180^\circ$

$\omega \rightarrow \infty, |L(\infty)| = \left| \frac{2}{j\infty-1} \right| = \frac{2}{\infty} = 0$

$\angle L(\infty) = \angle 2 - \angle j = 0 - (90) = -90^\circ$

14

[ステップ2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1, 0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。
時計方向は+, 反時計方向は-とする。

$N = -1$ 反時計回方向に1回転

[ステップ3] $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを Π とする。

$\Pi = 1$ 極: 1

15

[ステップ4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。
したがって、 $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定、
 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

$Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$ 安定

16

[例 6.3] (不安定系の場合)

$L(s) = \frac{K}{s-1} \quad K = 2, \frac{3}{4}$

[ステップ1]

(a) $K = 2$

(b) $K = \frac{3}{4}$

[ステップ2] $N = -1$ $N = 0$

[ステップ3] $\Pi = 1$ $\Pi = 1$

[ステップ4] $Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$ $Z = N + \Pi = 0 + 1 = 1 \neq 0$

安定 **不安定**

17

第6章: フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法

キーワード: **ナイキストの安定判別法**

学習目標: **ナイキストの安定判別法を理解し、フィードバック制御系の安定性を判定できるようになる。**

18