2021 年 6 月 16 日
河合康典

2021 年度 計測制御工学 中間試験 (模範解答)
2021 年 6 月 16 日 1,2 限 (9:30-10:50)

注意：途中計算が解答欄に記入されていない場合は減点とする。

[**問題 1**] (配点 20 点 (各 10 点))*学生の到達目標 (1),(2)

次のシステム

$$2\ddot{z}(t) = -2z(t) - \dot{z}(t) + 4f(t)$$

において，下記の場合において次の状態空間表現の A, B, C, D を答えよ。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

(1)

$$u(t) = f(t),\ y(t) = z(t),\ x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

(2)

$$u(t) = f(t),\ y(t) = \dot{z}(t),\ x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t) + \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

[**解答**]

(1)

$$\ddot{z}(t) = -z(t) - \frac{1}{2}\dot{z}(t) + 2f(t) \tag{1-1}$$

より，次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1-2}$$

よって，

$$\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} \tag{1-3}$$

$$\underline{C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 0} \tag{1-4}$$

(2)

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) + \ddot{z}(t) &= -z(t) + \frac{1}{2}\dot{z}(t) + 2f(t)\\ &= -\frac{3}{2}z(t) + \frac{1}{2}(z(t) + \dot{z}(t)) + 2f(t)\end{aligned} \tag{1-5}$$

より，次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t) + \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t) + \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t) + \dot{z}(t) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1-6}$$

よって，

$$\underline{A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} \tag{1-7}$$

$$\underline{C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\ D = 0} \tag{1-8}$$

[**問題 2**] (配点 10 点)*学生の到達目標 (1),(2)

次の線形システムの状態空間表現から伝達関数 $P(s)$ を答えよ。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

[**解答**]

$$\begin{aligned} P(s) &= C\left(sI - A\right)^{-1} B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s(s+1)+1}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+s+1}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\frac{1}{s^2+s+1}} \end{aligned} \tag{2-1}$$

[**問題 3**] (配点 15 点)*学生の到達目標 (1),(2)

次のシステムにおいて，入力 V_m，出力 $y = x_1$ となるようにブロック線図を描け。

$$\ddot{x}_1(t) = -\dot{x}_1(t) - x_2(t) - x_1(t)$$
$$2\ddot{x}_2(t) = -\dot{x}_1(t) - 2\dot{x}_2(t) + 2V_m(t) + 2x_2(t)$$

図 3-1: ブロック線図

[**解答**]

$$2\ddot{x}_2(t) = -\dot{x}_1(t) - 2\dot{x}_2(t) + 2V_m(t) + 2x_2(t) \tag{3-1}$$

は，次のようになる。

$$\ddot{x}_2(t) = -\frac{1}{2}\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) + V_m(t) + x_2(t) \tag{3-2}$$

ブロック線図は図 3-2 のようになる。

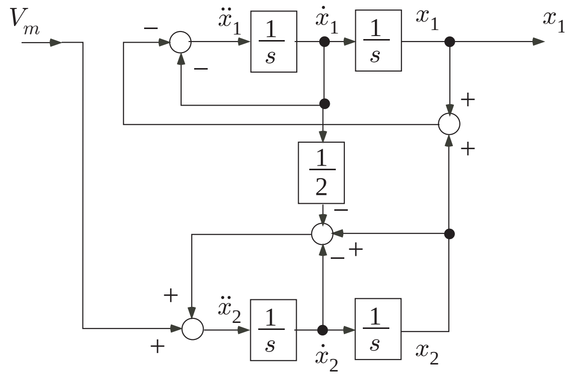

図 3-2: ブロック線図

[問題 4] (配点 20 点 ((1):15 点,(2):5 点))*学生の到達目標 (3)

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

において，次の問いに答えよ。ただし，付録のラプラス変換表を用いてよい。

(1) 遷移行列 e^{At} を答えよ。

(2) 零入力応答 $y(t)$ を答えよ。

[解答]

(1) **ラプラス変換を用いる場合**

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s(s+5)+4} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+5s+4} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-1}$$

と分解でき，係数行列 K_1，K_2 を用いて次のように分解できる。

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s+1}K_1 + \frac{1}{s+4}K_2 \tag{4-2}$$

係数行列 K_1，K_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} K_1 &= (s+1)(sI - A)^{-1}\big|_{s=-1} \\ &= \frac{1}{s+4} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-3}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= (s+4)(sI - A)^{-1}\big|_{s=-4} \\ &= \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-4} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-4}$$

遷移行列は次のようになる。

$$\underline{e^{At} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} e^{-4t}} \tag{4-5}$$

対角化を用いる場合

固有値を求める。

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 4 & s+5 \end{vmatrix} = s(s+5)+4 \\ &= s^2 + 5s + 4 = (s+1)(s+4) \end{aligned} \tag{4-6}$$

ゆえに，固有値は以下のようになる。

$$\lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = -4 \tag{4-7}$$

固有ベクトル v_1，v_2 を定義する。λ_1 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \\ &\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4-8}$$

よって，固有ベクトル v_1 は次のようになる。

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4-9}$$

λ_2 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-10}$$

よって，固有ベクトル v_2 は次のようになる。

$$v_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{4-11}$$

ここで，

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -4\beta \end{bmatrix} \tag{4-12}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \tag{4-13}$$

となるから

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{\Lambda t}S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -4\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{3\alpha\beta}\right) \begin{bmatrix} -4\beta & -\beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3\alpha\beta} \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} & \beta e^{-4t} \\ -\alpha e^{-t} & -4\beta e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4\beta & -\beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3\alpha\beta} \begin{bmatrix} -4\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-4t} & -\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-4t} \\ 4\alpha\beta e^{-t} - 4\alpha\beta e^{-4t} & \alpha\beta e^{-t} - 4\alpha\beta e^{-4t} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4e^{-t} + e^{-4t} & -e^{-t} + e^{-4t} \\ 4e^{-t} - 4e^{-4t} & e^{-t} - 4e^{-4t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} e^{-4t} \end{aligned} \tag{4-14}$$

(2) 零入力応答は次のようになる。

$$\begin{aligned}
y(t) &= Ce^{At}x_0 \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4 & 1 \\ -4 & -1\end{bmatrix}e^{-t} - \begin{bmatrix}1 & 1 \\ -4 & -4\end{bmatrix}e^{-4t}\right)\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}4 & -4\end{bmatrix}e^{-t} - \begin{bmatrix}1 & -4\end{bmatrix}e^{-4t}\right)\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} \\
&= \underline{\frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}} \qquad (4\text{-}15)
\end{aligned}$$

[問題 5] (配点 15 点)*学生の到達目標 (4)

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

における A, B が以下のように与えられたとき，可制御性を可制御性行列を用いて判別して，可制御または可制御ではないか答えよ。

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -4 & -5\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

[解答]

$$AB = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ -5\end{bmatrix} \qquad (5\text{-}1)$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & -5\end{bmatrix} = 2 \qquad (5\text{-}2)$$

よって，可制御である。

(別解)

$$\begin{vmatrix}B & AB\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 \\ 1 & -5\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad (5\text{-}3)$$

よって，可制御である。

[**問題 6**] (配点 20 点)*学生の到達目標 (4)

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について，$A_{cl} := A + BK$ の固有値 $\lambda = \lambda_1$，λ_2 を $p_1 = -1, p_2 = -2$ とする次式の状態フィードバック形式のコントローラ k_1，k_2 を答えよ。

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t),\quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

[**解答**]

A_{cl} は

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 + k_1 & -5 + k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6-1}$$

A_{cl} の特性方程式は

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_{cl}| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 - k_1 & \lambda + 5 - k_2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 5 - k_2) + (4 - k_1) \\ &= \lambda^2 + (5 - k_2)\lambda + 4 - k_1 \end{aligned} \tag{6-2}$$

となる。よって

$$5 - k_2 = -(p_1 + p_2) \tag{6-3}$$

$$4 - k_1 = p_1 p_2 \tag{6-4}$$

となるため (6-3) 式から

$$\begin{aligned} k_2 &= 5 + p_1 + p_2 \\ &= 5 - 1 - 2 = \underline{\ 2\ } \end{aligned} \tag{6-5}$$

(6-4) 式から

$$\begin{aligned} k_1 &= 4 - p_1 p_2 \\ &= 4 - (-1)(-2) = \underline{2\ \ } \end{aligned} \tag{6-6}$$

となる。

ラプラス変換表

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
単位インパルス関数 $\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \infty & (t = 0) \end{cases}$	1	単位ステップ関数 $u_s(t) = 1$	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	$\dfrac{t^n}{n!}e^{-at}$	$\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$