2021 年 7 月 21 日
河合康典

# 2021 年度 計測制御工学 期末試験 (模範解答)
# 2021 年 7 月 21 日 1,2 限 (8:50-10:20)

注意：途中計算が解答欄に記入されていない場合は減点とする。

**[問題 1]** (配点 20 点)*学生の到達目標 (6)

1 出力システムの状態空間表現

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)\\ y(t)=\bar{c}x(t)\end{cases}$$

における $A,\ b,\ \bar{c}$ が以下のように与えられたとき，可観測性を調べよ。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \bar{c}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-1}$$

**[解答]**

可観測性行列は,

$$V_o=\begin{bmatrix}\bar{c}\\ \bar{c}A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \tag{1-2}$$

より，$\det V_o=2\neq 0$，または $\mathrm{rank}(V_o)=2$ より可観測である。

**[問題 2]** (配点 20 点)*学生の到達目標 (5)

制御対象の状態空間表現が

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)\\ y(t)=cx(t)\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

であるとき，$A_e+b_ek_e$ の固有値が $-1,\ -2,\ -4$ となるような積分型コントローラ

$$\mathcal{K}:u(t)=kx(t)+gw(t),\ w(t)=\int_0^t e(t)\,dt$$

を設計せよ。ただし,

$$A_e=\begin{bmatrix}A & 0\\ -c & 0\end{bmatrix},\ b_e=\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix},\ k_e=\begin{bmatrix}k & g\end{bmatrix}$$

である。

**[解答]**

$k=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$ とおく。

$$\begin{aligned}A_e+b_ek_e &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & g\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & g\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2+k_1 & -3+k_2 & g\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-1}$$

$A_e+b_ek_e$ の特性方程式は

$$\begin{aligned}&|\lambda I-(A_e+b_ek_e)|\\ &=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 2-k_1 & \lambda+3-k_2 & -g\\ 1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}\\ &=\lambda^2(\lambda+3-k_2)+g+\lambda(2-k_1)\\ &=\lambda^3+(3-k_2)\lambda^2+\lambda(2-k_1)+g\end{aligned} \tag{2-2}$$

一方，固有値から特性方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}&(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+4)\\ &=(\lambda^2+3\lambda+2)(\lambda+4)\\ &=\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+4\lambda^2+12\lambda+8\\ &=\lambda^3+7\lambda^2+14\lambda+8\end{aligned} \tag{2-3}$$

(2-2), (2-3) 式を比較して

$$3 - k_2 = 7,\ 2 - k_1 = 14,\ g = 8 \tag{2-4}$$

よって，

$$k_2 = -4,\ k_1 = -12,\ g = 8 \tag{2-5}$$

ゆえに，

$$\underline{k_e = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 8 \end{bmatrix}} \tag{2-6}$$

[**問題 3**] (配点 20 点)*学生の到達目標 (7)

零入力の線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

が与えられたとき，$Q = I$ としたリアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q$$

の解 $P = P^T$ が正定であるかどうかを調べて，漸近安定性を判別せよ。

[**解答**]

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-1}$$

$$\begin{bmatrix} p_{12} & 4p_{11} - p_{12} \\ p_{22} & 4p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \\ 4p_{11} - p_{12} & 4p_{12} - p_{22} \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & 4p_{11} - p_{12} + p_{22} \\ 4p_{11} - p_{12} + p_{22} & 2(4p_{12} - p_{22}) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって，

$$2p_{12} = -1 \tag{3-3}$$
$$4p_{11} - p_{12} + p_{22} = 0 \tag{3-4}$$
$$2(4p_{12} - p_{22}) = -1 \tag{3-5}$$

(3-3) 式より $p_{12} = -0.5$。(3-5) 式へ代入

$$\begin{aligned} 2(-2 - p_{22}) &= -1 \\ -2 - p_{22} &= -0.5 \\ p_{22} &= -1.5 \end{aligned} \tag{3-6}$$

(3-4) 式へ代入

$$\begin{aligned} 4p_{11} + 0.5 - 1.5 &= 0 \\ 4p_{11} &= 1 \\ p_{11} &= 0.25 \end{aligned} \tag{3-7}$$

よって，$P$ は

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \tag{3-8}$$

となる。主座小行列は

$$0.25 > 0 \tag{3-9}$$

$$\begin{aligned} |P| &= 0.25 \times (-1.5) - (-0.5)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{8} < 0 \end{aligned} \tag{3-10}$$

となるため，行列 $P$ は正定でない。よって，<u>漸近安定でない。</u>

**[問題 4]** (配点 30 点 ((1):25 点,(2):5 点)) *学生の到達目標 (8)

1 慣性システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

において，評価関数

$$J = \int_0^\infty \left(x(t)^T Qx(t) + ru(t)^2\right) dt$$

の重みが次式により与えられたとき，以下の問いに答えよ。

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix},\quad r = 1$$

(1) リカッチ方程式の正定対称解 $P$ を求めよ。

$$PA + A^T P - \frac{1}{r} Pbb^T P + Q = 0$$

ただし，$P$ の要素はすべて正となることを用いてよい。

(2) コントローラのゲイン $k$ を求めよ。

$$u = kx(t),\ k = -\frac{1}{r} b^T P$$

**[解答]**

(1) $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = 0 \tag{4-1}$$

式整理すると

$$\begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11} - 3p_{12} \\ -2p_{22} & p_{12} - 3p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2p_{12} & -2p_{22} \\ p_{11} - 3p_{12} & p_{12} - 3p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = 0 \tag{4-2}$$

$$\begin{bmatrix} -4p_{12} & p_{11} - 3p_{12} - 2p_{22} \\ p_{11} - 3p_{12} - 2p_{22} & 2(p_{12} - 3p_{22}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = 0 \tag{4-3}$$

$$\begin{bmatrix} -4p_{12} - p_{12}^2 + 5 & p_{11} - 3p_{12} - 2p_{22} - p_{12}p_{22} \\ p_{11} - 3p_{12} - 2p_{22} - p_{12}p_{22} & 2(p_{12} - 3p_{22}) - p_{22}^2 + 14 \end{bmatrix} = 0 \tag{4-4}$$

となる。(1,1) 要素から

$$-p_{12}^2 - 4p_{12} + 5 = 0 \tag{4-5}$$
$$-(p_{12}^2 + 4p_{12} - 5) = 0 \tag{4-6}$$
$$-(p_{12} - 1)(p_{12} + 5) = 0 \tag{4-7}$$

$p_{12} > 0$ より $\underline{p_{12} = 1}$ となる。

(2,2) 要素から

$$2(p_{12} - 3p_{22}) - p_{22}^2 + 14 = 0 \tag{4-8}$$
$$2(1 - 3p_{22}) - p_{22}^2 + 14 = 0 \tag{4-9}$$
$$p_{22}^2 + 6p_{22} - 16 = 0 \tag{4-10}$$
$$(p_{22} + 8)(p_{22} - 2) = 0 \tag{4-11}$$

$p_{22} > 0$ より $\underline{p_{22} = 2}$ となる。

(1,2) 要素から

$$\begin{aligned} p_{11} - 3p_{12} - 2p_{22} - p_{12}p_{22} &= 0 \\ p_{11} - 3 - 4 - 2 &= 0 \\ p_{11} &= 9 \end{aligned} \tag{4-12}$$

より，$\underline{p_{11} = 9}$ となる。よって，$P$ は

$$\underline{P = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \tag{4-13}$$

となる。

(2) $k$ は

$$k = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{-\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}} \tag{4-14}$$

となる。

[**問題 5**] (配点 10 点)*学生の到達目標 (6)

線形システム

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases}$$

に対して，同一次元オブザーバ

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t))$$

を用いて $\hat{x}(t)$ を推定したい。同一次元オブザーバを図 5-1 の点線の中にブロック線図で描け。

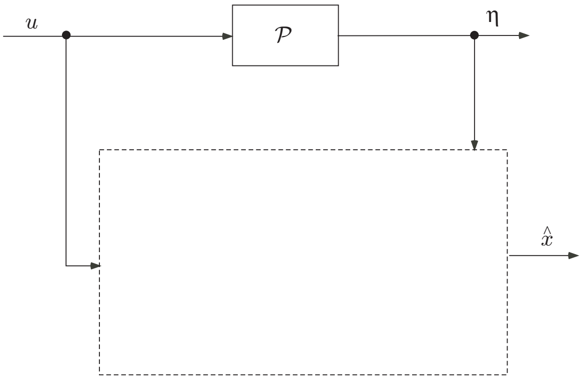


図 5-1: 状態フィードバック制御系

[**解答**]

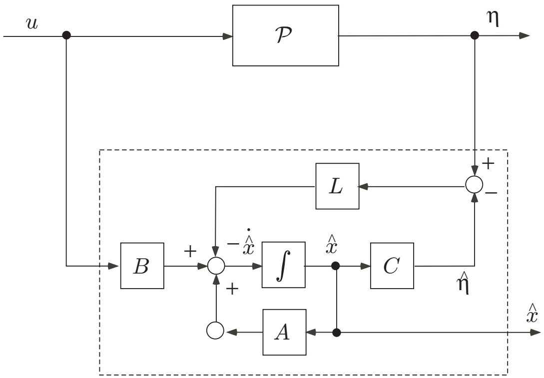


図 5-2: 状態フィードバック制御系