第 2 章 システムの状態空間表現

2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

キーワード： 状態空間表現

学習目標：状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解する。

2 システムの状態空間表現

2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Js^2 + \mu s}$$

$$\left(Js^2 + \mu s\right) y(s) = u(s)$$

$$J\ddot{y}(t) = u(t) - \mu \dot{y}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

状態を変えると

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) + \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\left(1 - \frac{\mu}{J}\right) & \left(1 - \frac{\mu}{J}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) + \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

システムの状態は唯一でないため，状態空間表現は無数に存在

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\left(1-\frac{\mu}{J}\right) & \left(1-\frac{\mu}{J}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|sI - A| &= \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ \left(1-\frac{\mu}{J}\right) & s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right) \end{vmatrix} \\
&= (s+1)\left(s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\right) + \left(1-\frac{\mu}{J}\right) \\
&= s\left(s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\right) + \left(s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\right) + \left(1-\frac{\mu}{J}\right) \\
&= s\left(s-\left(1-\frac{\mu}{J}\right)\right) + s \\
&= s\left(s+\frac{\mu}{J}\right)
\end{aligned}$$

固有値 $s = 0, \quad -\frac{\mu}{J}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

固有値 $s = 0, \quad -\dfrac{\mu}{J}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ y(t)+\dot{y}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\left(1-\frac{\mu}{J}\right) & \left(1-\frac{\mu}{J}\right) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t)+\dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

固有値 $s = 0, \quad -\dfrac{\mu}{J}$

固有値は，どのように状態を選んでも変わらない

可制御標準形への変換

真にプロパーな規約な n 次の伝達関数表現

$$P(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} u(s)$$

は，可制御標準形と呼ばれる以下の n 次の状態空間表現に変換できる。

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t)$$

$$y(t) = C_c x_c(t)$$

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} x_{c1}(t) \\ x_{c2}(t) \\ x_{c3}(t) \\ \vdots \\ x_{cn}(t) \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

可観測標準形

$$\dot{x}_o(t) = A_o x_o(t) + B_o u(t)$$
$$y(t) = C_o x_o(t)$$

$$A_o = A_c^T$$
$$B_o = C_c^T$$
$$C_o = B_c^T$$

【例】問題2.6(2)

$$P(s) = \frac{4(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} u(s)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

[問題 2.6(1)]

伝達関数 $P(s)$ が与えられたとき，可制御標準形 A_c, B_c, C_c , 可観測標準形 A_o, B_o, C_o を求めよ。

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

最小実現

$$y(t) = x_2(t) = \dot{z}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

2次

$$y(t) = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ でない

伝達関数を求める

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s\left(s + \frac{\mu}{J}\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{\mu}{J} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \frac{1}{s\left(s + \frac{\mu}{J}\right)} \begin{bmatrix} 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Js + \mu}$$

1次

状態空間表現を求める

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Js + \mu}$$

$$(Js + \mu)y(s) = u(s)$$

$$J\dot{y}(t) + \mu y(t) = u(t)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\mu}{J}y(t) + \frac{1}{J}u(t)$$

状態空間表現は次のようになる

$$\dot{x}(t) = \frac{\mu}{J}x(t) + \frac{1}{J}u(t)$$ 1次

$$y(t) = x(t)$$

同じシステム

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$ 2次

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

状態空間表現は2次だが，伝達関数は1次のため，最小実現でない

行列の大きさ

$$\begin{array}{cccccc} & & & 3 & & \\ 1 & \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}* & * & *\end{bmatrix}\end{array}$$

1行3列

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ 1 & \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} & = & *\end{array}$$

1行1列

[MATLAB演習]

2.5.3

- [A, B, C, D] = tf2ss(num, den)
- Ss_Pb = ss2ss(ss_P, T)

2.5.4

- Ss_P_min = ss(ss_P, 'min')

[Scilab演習]

- s=poly(0,'s')

  H = (4*s+8)/(s^3+3*s^2+4*s+2)

  ss_P = tf2ss(H);

  変換ミスが多い

- ss_Pb = ss2ss(ss_P, T)

- ss_P = syslin('c',A,B,C,D)

  Ss_P_min = minss(ss_P)

[問題 2.7(2)]

1入出力システムの状態空間表現

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

における c が以下のように与えられたとき，伝達関数 $P(s)$ を求めることで，最小実現であるかどうかを判別せよ。

$$c = [1 \;\; 1]$$

第 2 章 システムの状態空間表現

2.4 伝達関数表現から状態空間表現への変換

キーワード： 状態空間表現

学習目標：状態空間表現と伝達関数表現の関係を理解する。

第 3 章　線形システムの時間応答

3.1　1次システムの時間応答

キーワード：遷移行列，時間応答

学習目標：遷移行列の求め，時間応答が計算できるようになる。

3 線形システムの時間応答

3.1 1次システムの時間応答

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

零入力応答 $u(t) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) 式から

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \ \Rightarrow \int \frac{dx(t)}{x(t)} = \int a \ dt \ \Rightarrow \ log \ x(t) = at + C$$

$$\Rightarrow \ x(t) = e^{at+C}$$

初期条件 $x(0) = e^C = x_0$

$$x(t) = e^{at} x_0$$

$$y(t) = ce^{at} x_0$$

零状態応答 $x(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (3.13)$$

$x(t) = e^{at}z(t)$ と仮定して両辺を微分すると

$$\dot{x}(t) = ae^{at}z(t) + e^{at}\dot{z}(t)$$

(3.13) 式を代入する

$$a\underline{x(t)} + bu(t) = ae^{at}z(t) + e^{at}\dot{z}(t)$$

$$e^{at}z(t)$$

$$\cancel{ae^{at}z(t)} + bu(t) = \cancel{ae^{at}z(t)} + e^{at}\dot{z}(t)$$

$$e^{at}\dot{z}(t) = bu(t)$$

$$\dot{z}(t) = e^{-at}bu(t)$$

$$z(t) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + \alpha$$

$$z(0) = e^{-a\times 0}x_0 = 0$$ より

$$\alpha = z(0) - \int_0^0 e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau = z(0) = 0$$

よって

$$x(t) = e^{at}z(t) = e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = c\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

任意の時間応答(零入力応答＋零状態応答)

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = ce^{at}x_0 + c\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

【例3.2】

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E & (t \geq 0) \end{cases}$$

$$y(t) = c\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

$$y(t) = 1\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\frac{K}{T}Ed\tau + 0\cdot u(t)$$

$$= \frac{KE}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}d\tau$$

$\tilde{\tau} = t - \tau$ とおく　$\dfrac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = -1$

τ	0	$\rightarrow$	t
$\tilde{\tau}$	t	$\rightarrow$	0

$$y(t) = -\frac{KE}{T}\int_t^0 e^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}d\tilde{\tau} = \frac{KE}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}d\tilde{\tau}$$

$$= \frac{KE}{T}\left[-Te^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}\right]_0^t = KE\left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right)$$

[問題 3.1(2)]

次のシステムにおいて，$u(t) = 1 \ (t \geq 0)$ を加えたときの $y(t)$ を求めよ。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t), \quad x(0) = 0 \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

第 3 章　線形システムの時間応答

3.1　1次システムの時間応答

キーワード：遷移行列，時間応答

学習目標：遷移行列の求め，時間応答が計算できるようになる。