第 3 章　線形システムの時間応答

3.1　1次システムの時間応答

3.2　n次システムの時間応答

キーワード：遷移行列，時間応答

学習目標：遷移行列の求め，時間応答が計算できるようになる。

3 線形システムの時間応答

3.1 1次システムの時間応答

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = cx(t) + du(t) \qquad (3.1)$$

零入力応答 $u(t) = 0$

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = cx(t) \qquad (3.2)$$

(3.2) 式から

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \;\Rightarrow\; \int \frac{dx(t)}{x(t)} = \int a\ dt \;\Rightarrow\; log\ x(t) = at + C$$

$$\Rightarrow\; x(t) = e^{at+C}$$

初期条件 $x(0) = e^{C} = x_0$

$$x(t) = e^{at} x_0$$

$$y(t) = ce^{at} x_0$$

零状態応答 $x(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \qquad (3.13)$$

$x(t) = e^{at}z(t)$ と仮定して両辺を微分すると

$$\dot{x}(t) = ae^{at}z(t) + e^{at}\dot{z}(t)$$

(3.13) 式を代入する

$$a\underline{x(t)} + bu(t) = ae^{at}z(t) + e^{at}\dot{z}(t)$$

$$e^{at}z(t)$$

$$\cancel{ae^{at}z(t)} + bu(t) = \cancel{ae^{at}z(t)} + e^{at}\dot{z}(t)$$

$$e^{at}\dot{z}(t) = bu(t)$$

$$\dot{z}(t) = e^{-at}bu(t)$$

$$z(t) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau + \alpha$$

$$z(0) = e^{-a \times 0} x_0 = 0$$ より

$$\alpha = z(0) - \int_0^0 e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau = z(0) = 0$$

よって

$$x(t) = e^{at} z(t) = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

$$y(t) = c \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t)$$

任意の時間応答(零入力応答＋零状態応答)

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

$$y(t) = ce^{at} x_0 + c \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t)$$

【例3.2】

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E & (t \geq 0) \end{cases}$$

$$y(t) = c\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

$$y(t) = 1\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\frac{K}{T}Ed\tau + 0 \cdot u(t)$$

$$= \frac{KE}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}d\tau$$

$\tilde{\tau} = t - \tau$ とおく $\quad \dfrac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = -1$

τ	0	$\to$	t
$\tilde{\tau}$	t	$\to$	0

$$y(t) = -\frac{KE}{T}\int_t^0 e^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}d\tilde{\tau} = \frac{KE}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}d\tilde{\tau}$$

$$= \frac{KE}{T}\left[-Te^{-\frac{1}{T}\tilde{\tau}}\right]_0^t = KE\left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right)$$

[問題 3.1(2)]

次のシステムにおいて，$u(t) = 1\ (t \geq 0)$ を加えたときの $y(t)$ を求めよ。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t), \quad x(0) = 0 \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

3 線形システムの時間応答

3.2 n次システムの時間応答

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (3.27)$$

遷移行列（行列指数関数）

$$e^{At} := I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots$$

例えば $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ とすると

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t}$$
$$= I + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k + \cdots$$

となる

$$e^{A\times 0} = I$$

$$e^{A\times 0} = I + \underbrace{0\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}}_{=0} + \underbrace{\frac{0^2}{2!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^2}_{=0} + \cdots + \underbrace{\frac{0^k}{k!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^k}_{=0} + \cdots$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left(I + t\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^k + \cdots\right)$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^k + \cdots$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}}_{=A}\underbrace{\left(I + t\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^{k-1} + \cdots\right)}_{=e^{At}}$$

$$A\int_0^t e^{At}d\tau = e^{At} - I$$

$A_1A_2 = A_2A_1$ ならば $e^{A_1t}e^{A_2t} = e^{(A_1+A_2)t}$

$$e^{At_1}e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$$

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

零入力応答 $u(t) = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 \end{aligned} \qquad (3.32)$$

ラプラス変換による遷移行列の求め方

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$sx(s) - x_0 = Ax(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[x(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x_0$$

(3.32) 式と比較して

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

[例3.4](1)

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+11 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+10)(s+1)} \begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s+10} K_1 + \frac{1}{s+1} K_2$$

$$K_1 = (s+10)(sI-A)^{-1}\Big|_{s=-10} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-10}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = (s+1)(sI-A)^{-1}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+10} \begin{bmatrix} s+11 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+10}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1 & -1 \\ 10 & 10\end{bmatrix} + \frac{1}{s+1}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}10 & 1 \\ -10 & -1\end{bmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1 \\ 10 & 10\end{bmatrix} e^{-10t} + \begin{bmatrix}10 & 1 \\ -10 & -1\end{bmatrix} e^{-t}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= ce^{At}x_0 \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1 \\ 10 & 10\end{bmatrix} e^{-10t} + \begin{bmatrix}10 & 1 \\ -10 & -1\end{bmatrix} e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix} e^{-10t} + \begin{bmatrix}10 & 1\end{bmatrix} e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\left(-1 \times e^{-10t} + 10 \times e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\left(10^{-t} - e^{-10t}\right)
\end{aligned}
$$

[問題 3.2(1)]

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \; x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が与えられたとき，ラプラス変換を利用して遷移行列 e^{At} を求めよ。また，零入力 $y(t)$ を求めよ。

［ MATLAB演習 ］

【例3.4】

ex3_4.mdl

ex3_4_parameter.m

A1 = [0 1; -10 -11];

A2 = [0 1; -10 -2];

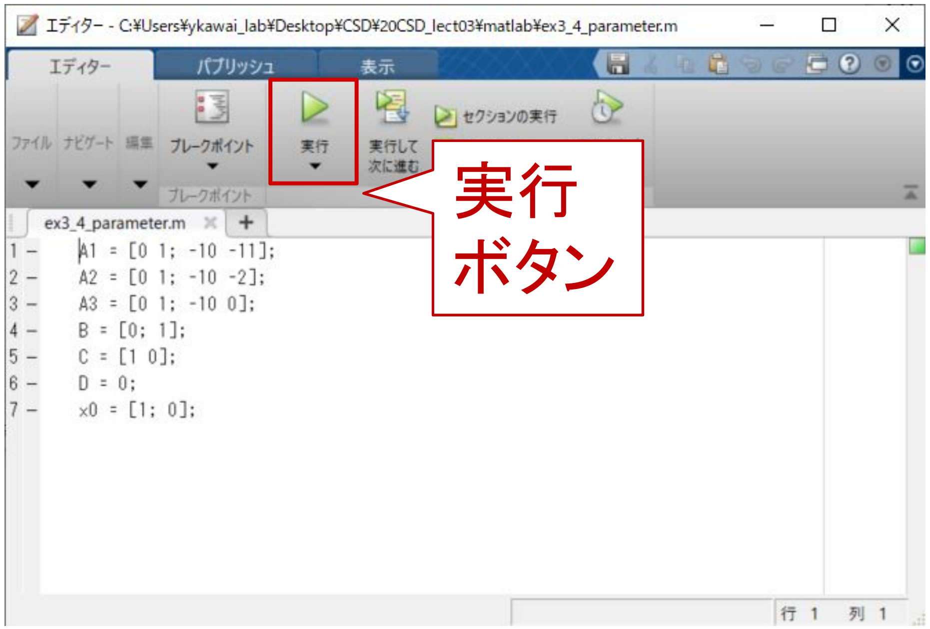
A3 = [0 1; -10 0];

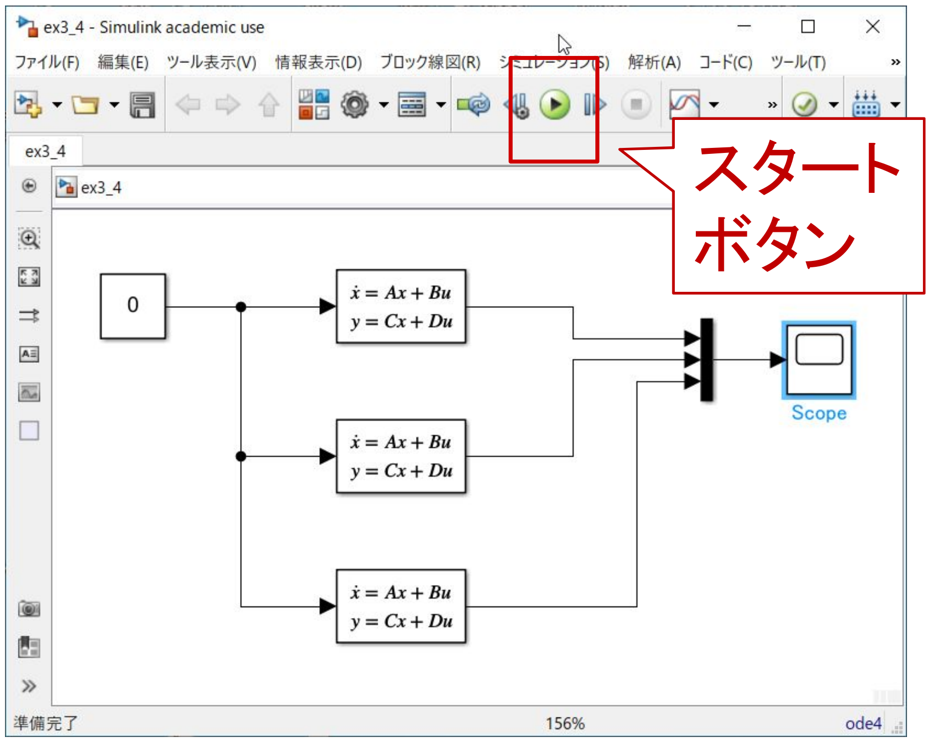
B = [0; 1];

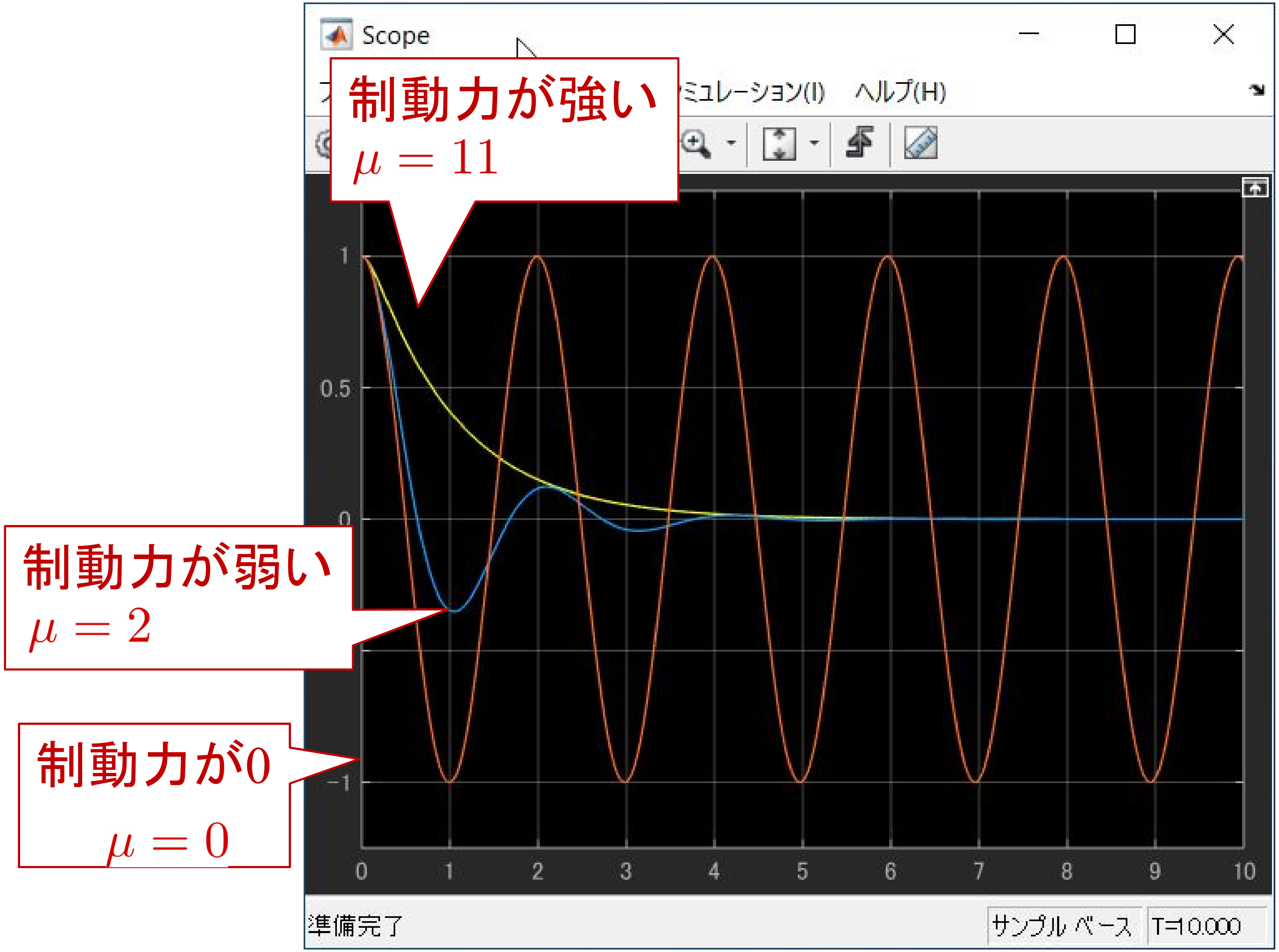
C = [1 0];

D = 0;

x0 = [1; 0];





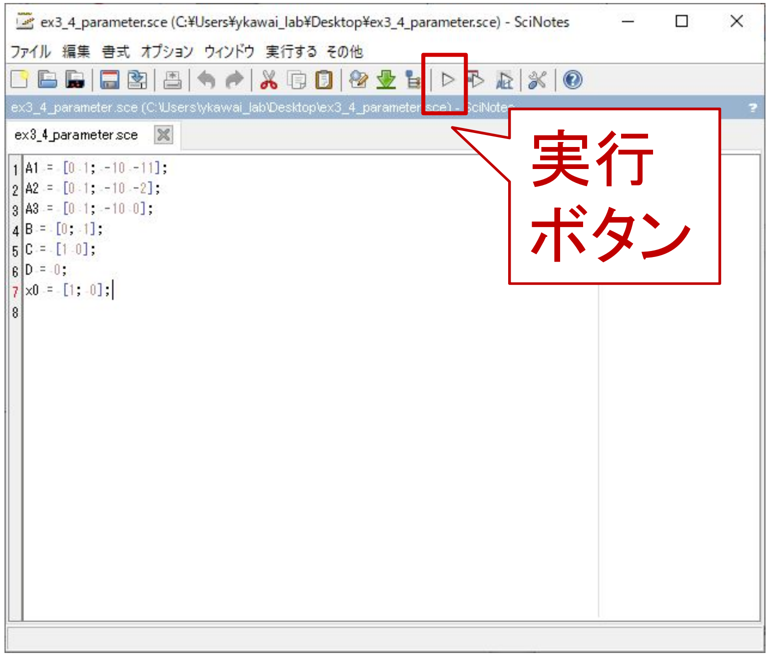

Scope
シミュレーション(I)
ヘルプ(H)
制動力が強い
$\mu = 11$
制動力が弱い
$\mu = 2$
制動力が0
$\mu = 0$
1
0.5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
準備完了
サンプル ベース
T=10.000

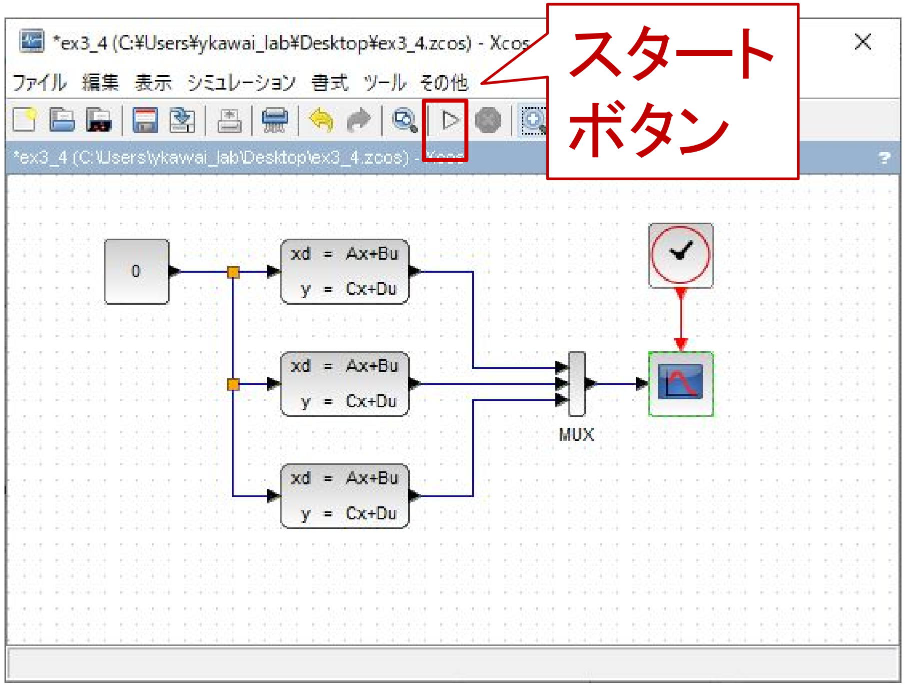
[Scilab演習]

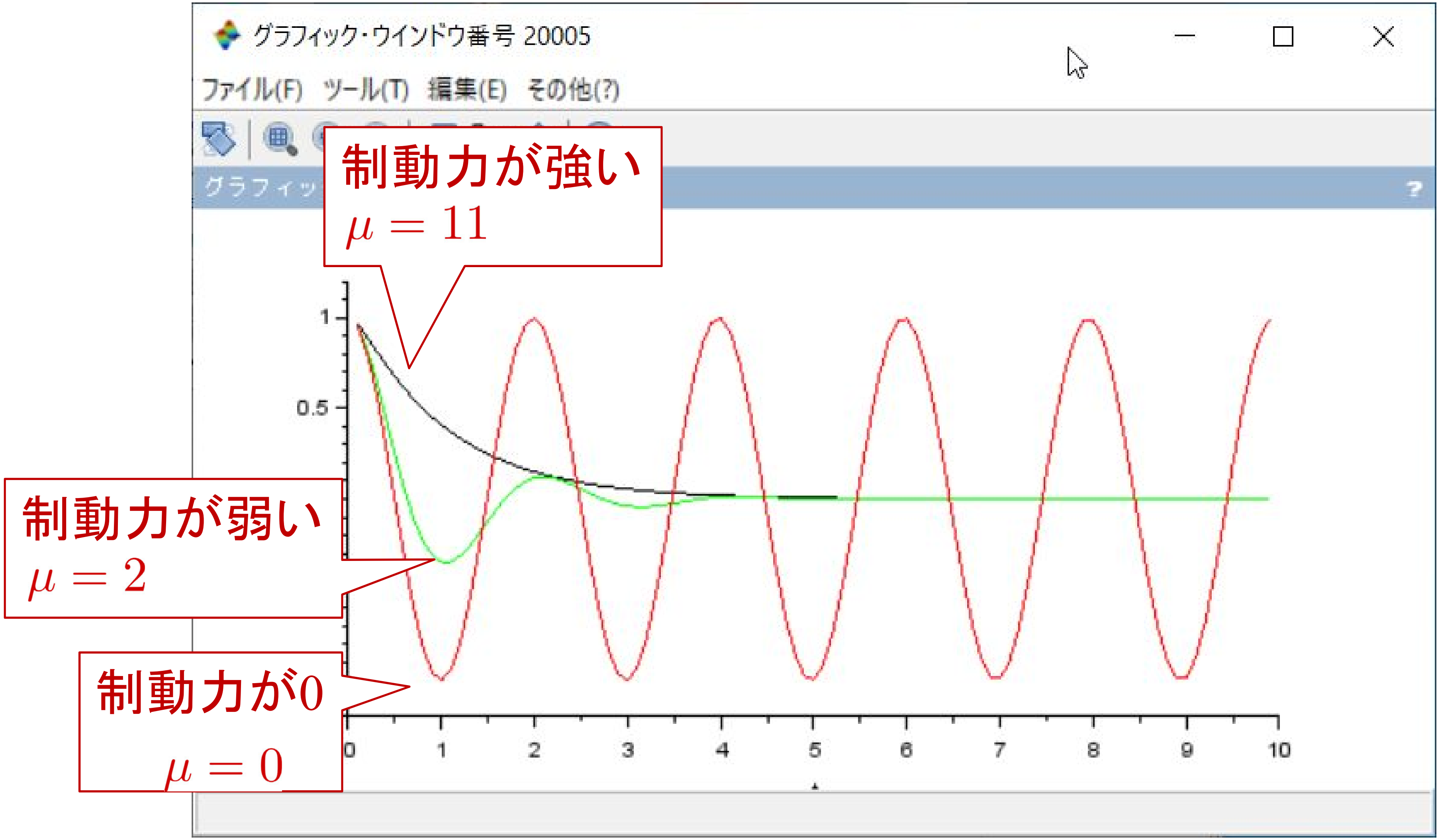
【例3.4】

ex3_4.zcos
ex3_4_parameter.sce

A1 = [0 1; -10 -11];
A2 = [0 1; -10 -2];
A3 = [0 1; -10 0];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = 0;
x0 = [1; 0];






グラフィック・ウインドウ番号 20005
ファイル(F) ツール(T) 編集(E) その他(?)
制動力が強い
$\mu = 11$
制動力が弱い
$\mu = 2$
制動力が0
$\mu = 0$
1
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

[MATLAB演習]

3.4.1 部分分数分解

[Scilab演習]

```
clear
s=poly(0,'s');
numQ11 = s+11;
numQ12 = 1;
numQ21 = -10;
numQ22 = s;
denQ1 = s+10;
denQ2 = s+1;
k11_1 = residu(numQ11,denQ1,denQ2)
k11_2 = residu(numQ11,denQ2,denQ1)
k12_1 = residu(numQ12,denQ1,denQ2)
k12_2 = residu(numQ12,denQ2,denQ1)
k21_1 = residu(numQ21,denQ1,denQ2)
k21_2 = residu(numQ21,denQ2,denQ1)
k22_1 = residu(numQ22,denQ1,denQ2)
k22_2 = residu(numQ22,denQ2,denQ1)
K1 = [k11_1 k12_1; k21_1 k22_1]
K2 = [k11_2 k12_2; k21_2 k22_2]
```

第 3 章　線形システムの時間応答

3.1　1次システムの時間応答

3.2　n次システムの時間応答

キーワード：遷移行列，時間応答

学習目標：遷移行列の求め，時間応答が計算できるようになる。