

2021 年度 計測制御工学 前期 第 5 回レポート (模範解答)

EM 専攻 1 年 番号 _____ 氏名 _____

【問題 1】

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

において, 固有ベクトルを用いて, 遷移行列 e^{At} を求めよ。

【解答】

固有値を求める。

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s(s+3) + 2 \\ &= s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) \end{aligned} \quad (1-1)$$

ゆえに, 固有値は以下ようになる。

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2 \quad (1-2)$$

固有ベクトル v_1, v_2 を定義する。 λ_1 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{aligned} (\lambda_1 I - A)v_1 &= 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-3)$$

よって, 固有ベクトル v_1 は次のようになる。

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

λ_2 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

よって, 固有ベクトル v_2 は次のようになる。

$$v_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

ここで,

$$S = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -2\beta \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

となるから

$$\begin{aligned} e^{At} &= S e^{\Lambda t} S^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2\beta & -\beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} & \beta e^{-2t} \\ -\alpha e^{-t} & -2\beta e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\beta & -\beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\alpha\beta} \begin{bmatrix} -2\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-2t} & -\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-2t} \\ 2\alpha\beta e^{-t} - 2\alpha\beta e^{-2t} & \alpha\beta e^{-t} - 2\alpha\beta e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \end{aligned} \quad (1-9)$$

【問題 2】

【問題 1】の遷移行列 e^{At} を用いて、単位ステップ応答 $y(t)$ を求めよ。

【解答】

$$y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(t) d\tau \quad (2-1)$$

$\tilde{\tau} = t - \tau$ とおくと、 $\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = -1$ より

$$\begin{array}{c|c} \tau & 0 \rightarrow t \\ \tilde{\tau} & t \rightarrow 0 \end{array} \quad (2-2)$$

となる。

$$\begin{aligned} y(t) &= -C \int_t^0 e^{A\tilde{\tau}} B u(t) d\tilde{\tau} = C \int_0^t e^{A\tilde{\tau}} B d\tilde{\tau} \\ &= -C \int_t^0 \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-\tilde{\tau}} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2\tilde{\tau}} \right) B u(t) d\tilde{\tau} \end{aligned} \quad (2-3)$$

積分

$$\int_0^t e^{-\tilde{\tau}} = -[e^{-\tilde{\tau}}]_0^t = -(e^{-t} - 1) \quad (2-4)$$

$$\int_0^t e^{-2\tilde{\tau}} = -\frac{1}{2}[e^{-2\tilde{\tau}}]_0^t = -\frac{1}{2}(e^{-2t} - 1) \quad (2-5)$$

より、

$$\begin{aligned} y(t) &= C \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} (1 - e^{-t}) - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \right) B u(t) \\ &= C \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \right) B \\ &= C \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \right) B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \end{aligned} \quad (2-6)$$