第 3 章 線形システムの時間応答

3.2 n次システムの時間応答

3.3 線形システムの極と安定性・過渡特性

キーワード： 遷移行列，時間応答，安定性

学習目標：対角化による遷移行列の求め，時間応答が計算できるようになる。極と安定性，過渡特性について理解する。

対角化による遷移行列の求め方

$A \in R^{n\times n}$ ：実数でn行n列

$$S^{-1}AS = \Lambda \quad \Rightarrow \quad A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S := [v_1, \cdots, v_n],\ \ \Lambda := \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$$

$v_1, \cdots, v_n$ 固有ベクトル

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 固有値

［ 例3.5 ］

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 10 & s+11 \end{vmatrix} = s(s+11) + 10 = s^2 + 11s + 10$$

$$= (s+10)(s+1)$$

固有値 $\lambda_1 = -10,\ \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = -10$ に対する固有ベクトルを求める

$$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -10v_{11} - v_{12} = 0 \\ 10v_{11} + v_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ v_1 = [\alpha, \ -10\alpha]^T$$

$\alpha \neq 0$ は任意の実数

$\lambda_2 = -1$ に対する固有ベクトルを求める

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_{21} - v_{22} = 0 \\ 10v_{21} + 10v_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ v_2 = [\beta, \ -\beta]^T$$

$\beta \neq 0$ は任意の実数

よって

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -10\alpha & -\beta \end{bmatrix}}_{=S} \underbrace{\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -10\alpha & -\beta \end{bmatrix}^{-1}}_{=S^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
A^k &= (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\cdots(S\Lambda S^{-1}) \\
&= S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{=I}\Lambda \underline{S^{-1}\cdots} S\Lambda S^{-1} \\
&= S\Lambda\Lambda\cdots\Lambda S^{-1} \\
&= S\Lambda^k S^{-1}
\end{aligned}
$$

を用いて

遷移行列

$$
\begin{aligned}
e^{At} &:= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots \\
&= I + tS\Lambda S^{-1} + \frac{t^2}{2!}S\Lambda^2 S^{-1} + \cdots + \frac{t^k}{k!}S\Lambda^k S^{-1} + \cdots \\
&= S\left(I + t\Lambda + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\Lambda^k + \cdots\right)S^{-1} \\
&= Se^{\Lambda t}S^{-1}
\end{aligned}
$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ のとき}$$

$$
\begin{aligned}
e^{\Lambda t} &= I + t\Lambda + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\Lambda^k + \cdots \\
&= I + t\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^k + \cdots \\
&= I + t\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} (-10)^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} \\
&\qquad + \cdots + \frac{t^k}{k!}\begin{bmatrix} (-10)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} + \cdots \\
&= \begin{bmatrix} \overbrace{\boxed{1 + t(-10) + \frac{t^2}{2!}(-10)^2 + \cdots}}^{= e^{-10t}} & 0 \\ 0 & \underbrace{\boxed{1 + t(-1) + \frac{t^2}{2!}(-1)^2 + \cdots}}_{= e^{-t}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\overbrace{\boxed{-10}}^{= \lambda_1} t} & 0 \\ 0 & e^{\underbrace{\boxed{-}}_{= \lambda_2} t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

対角化による遷移行列の求め方

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} \qquad e^{\Lambda t} = \mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\}$$

$$S := [v_1, \cdots, v_n]$$

$$S = [v_1 \ \ v_2] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -10\alpha & -\beta \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-10t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -10\alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-10t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{9\alpha\beta} \begin{bmatrix} -\beta & -\beta \\ 10\alpha & \alpha \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -e^{-10t} + 10e^{-t} & -e^{-10t} + e^{-t} \\ 10e^{-10t} - 10e^{-t} & 10e^{-10t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

任意時間応答

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (3.60)$$

［例］

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = e^{At} z(t) \qquad (3.61)$$

と仮定して微分すると

$$\dot{x}(t) = Ae^{At} z(t) + e^{At}\dot{z}(t) \qquad (3.62)$$

(3.60) 式より

$$A\underline{x(t)} + Bu(t) = Ae^{At} z(t) + e^{At}\dot{z}(t)$$

$$= e^{At} z(t)$$

$$\cancel{Ae^{At} z(t)} + Bu(t) = \cancel{Ae^{At} z(t)} + e^{At}\dot{z}(t)$$

$$Bu(t) = e^{At}\dot{z}(t) \qquad (3.63)$$

(3.62) 式から

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}z(t) + Bu(t)$$

(3.63) 式から

$$e^{At}\dot{z}(t) = Bu(t)$$

$$\dot{z}(t) = (e^{At})^{-1}Bu(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$z(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(t)d\tau + \alpha$$

初期値を考慮すると

$$x_0 = e^{-A\times 0}z(0) = Iz(0), \quad z(0) = x_0$$

$$\alpha = z(0) - \int_0^0 e^{-A\tau}Bu(t)d\tau = z(0) = x_0$$

$$
\begin{aligned}
x(t) = e^{At} z(t) &= e^{At}\alpha + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} Bu(t)d\tau \\
&= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(t)d\tau
\end{aligned}
$$

n 次システムの時間応答

$$
y = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{零入力応答}} + \underbrace{C\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(t)d\tau + Du(t)}_{\text{零状態応答}}
$$

［ MATLAB演習 ］

3.4.2 遷移行列
3.4.4 時間応答

【例3.6】単位ステップ応答（零状態応答）

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -11\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

$$y=\underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{零入力応答}}+\underbrace{C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(t)d\tau+Du(t)}_{\text{零状態応答 } y_1(t)}$$

$$y_1(t)=C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(t)d\tau$$

$\tilde{\tau}=t-\tau$ とおく　$\dfrac{d\tilde{\tau}}{d\tau}=-1$

τ	0	$\rightarrow$	t
$\tilde{\tau}$	t	$\rightarrow$	0

$$y_1(t)=-C\int_t^0 e^{A\tilde{\tau}}Bu(t)d\tilde{\tau}$$

$u(t)=1$ より

$$y_1(t)=C\int_0^t e^{A\tilde{\tau}}Bd\tilde{\tau}$$

$$y_1(t) = C\int_0^t \underline{e^{A\tilde\tau}} B d\tilde\tau$$

$$= \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix} e^{-10\tilde\tau} + \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix} e^{-\tilde\tau}\right)$$

$$= C\int_0^t \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix} e^{-10\tilde\tau} + \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix} e^{-\tilde\tau}\right) B d\tilde\tau$$

$$\int_0^t e^{-10\tilde\tau} = \left[e^{-10\tilde\tau}\right]_0^t = -\frac{1}{10}\left(e^{-10t}-1\right)$$

$$\int_0^t e^{-\tilde\tau} = \left[e^{-\tilde\tau}\right]_0^t = -\left(e^{-t}-1\right)$$

$$= \frac{1}{9}C\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix}\frac{1}{-10}\left(e^{-10t}-1\right) + \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{-1}\left(e^{-t}-1\right)\right)B$$

$$= \frac{1}{9}C\left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix}e^{-10t} - \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}e^{-t}\right)$$

$$= \frac{1}{9}C\left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{10}+10 & -\frac{1}{10}+1\\ 1-10 & 1-1\end{bmatrix}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix}e^{-10t} - \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}e^{-t}\right)$$

$$= \frac{1}{9}C\left(\begin{bmatrix}\frac{99}{10} & \frac{9}{10}\\ -9 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix}e^{-10t} - \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}e^{-t}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\frac{99}{10} & \frac{9}{10}\\ -9 & 0\end{bmatrix}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 10 & 10\end{bmatrix}e^{-10t} - \begin{bmatrix}10 & 1\\ -10 & -1\end{bmatrix}e^{-t}\right)\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix}\frac{99}{10} & \frac{9}{10}\end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix} e^{-10t} - \begin{bmatrix}10 & 1\end{bmatrix} e^{-t}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}(-1)e^{-10t} - e^{-t}\right) \\
&= \frac{1}{10} + \frac{1}{90}e^{-10t} - \frac{1}{9}e^{-t}
\end{aligned}
$$

[問題 3.4(1)]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ u(t) = 1$$

$y(t)$ (単位ステップ入力)を求めよ。

3 線形システムの時間応答

3.3 線形システムの極と安定性・過渡特性

漸近安定性の定義

零入力システム

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \ x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

における状態方程式の解 $x(t) = e^{At}x_0$ が，“任意の初期状態 $x(0) = x_0$ に対して $t \to \infty$で $x(t) \to 0$”となるとき，線形システム

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

は漸近安定であるという。

線形システムの漸近安定性の判別

線形システムの極を$\lambda = \lambda_1, \cdots, \lambda_n \ (\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i)$とする。このとき，極の実部 $\mathrm{Re}[\lambda]$ がすべて負であれば，そのときに限り，線形システムは漸近安定である。それに対し，線形システムの極の実部が一つでも正であれば，線形システムは不安定である。

［ 例3.7 ］

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{bmatrix}$　　固有値 $-10 \ \ -1$

$$e^{At} = K_1 \underbrace{e^{-10t}}_{0\ (t \to \infty)} + K_2 \underbrace{e^{-t}}_{0\ (t \to \infty)}$$

漸近安定

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$　　固有値 $-1 \pm 3j$

$$e^{At} = K_1 \underbrace{e^{-t}}_{0\ (t \to \infty)} \cos(3t) + K_2 \underbrace{e^{-t}}_{0\ (t \to \infty)} \sin(3t)$$

漸近安定

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$　　固有値　$-2,\ 1$

$$e^{At} = K_1 \underline{e^{-2t}} + K_2 \underline{e^{t}}$$

$0\ (t \to \infty)$　$\infty\ (t \to \infty)$　　不安定

有界入力有界出力安定性

初期状態を $x(0) = x_0$ とした線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

において，$u(t)$ が有界 $(\|u(t)\| \leq M_u)$ とであるとする。このとき，ある正の定数 $M_u,\ M_y$ に対し，“任意の有界な $u(t)$ に対して $y(t)$ が有界 $(\|y(t)\| \leq M_y)$” であるとき，線形システム(3.27)式は有界入力有界出力安定であるという。

極と時間応答の過渡特性

極の実部 $\alpha_i < 0$ が負側に大きいほど速やかに零に収束する

極の虚部 $\beta_i > 0$ が大きいほど振動周期は短い

［ MATLAB演習 ］

3.4.5 システムの極と漸近安定性

第 3 章 線形システムの時間応答

3.2 n次システムの時間応答

3.3 線形システムの極と安定性・過渡特性

キーワード： 遷移行列，時間応答，安定性

学習目標：対角化による遷移行列の求め，時間応答が計算できるようになる。極と安定性，過渡特性について理解する。