2021 年度 計測制御工学 前期 第 9 回レポート (模範解答)

EM 専攻 1 年 番号 ________ 氏名 ____________________

【問題 1】

制御対象の状態空間表現が

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

であるとき，$A_e+B_eK_e$ の固有値が $-1,\ -3,\ -5$ となるような積分型コントローラ

$$\mathcal{K}:u(t)=Kx(t)+Gw(t),\ w(t)=\int_0^t e(t)\ dt$$

を設計せよ。ただし，

$$A_e=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix},\ B_e=\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix},\ K_e=\begin{bmatrix}K & G\end{bmatrix}$$

である。

【解答】

$K=\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}$ とおく。

$$\begin{aligned}A_e+B_eK_e &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_1 & K_2 & G\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ K_1 & K_2 & G\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1+K_1 & -2+K_2 & G\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1-1}$$

$A_e+B_eK_e$ の特性方程式は

$$\begin{aligned}&|\lambda I-(A_e+B_eK_e)|\\ &=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 1-K_1 & \lambda+2-K_2 & -G\\ 1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}\\ &=\lambda^2(\lambda+2-K_2)+G+\lambda(1-K_1)\\ &=\lambda^3+(2-K_2)\lambda^2+\lambda(1-K_1)+G\end{aligned}\tag{1-2}$$

一方，固有値から特性方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}&(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5)\\ &=(\lambda^2+4\lambda+3)(\lambda+5)\\ &=\lambda^3+4\lambda^2+3\lambda+5\lambda^2+20\lambda+15\\ &=\lambda^3+9\lambda^2+23\lambda+15\end{aligned}\tag{1-3}$$

(1-2), (1-3) 式を比較して

$$2-K_2=9,\ 1-K_1=23,\ G=15\tag{1-4}$$

よって，

$$K_2=-7,\ K_1=-22,\ G=15\tag{1-5}$$

ゆえに，

$$\underline{K_e=\begin{bmatrix}-22 & -7 & 15\end{bmatrix}}\tag{1-6}$$

【別解】

アッカーマンの極配置アルゴリズムを用いる。

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5)\\ &= (\lambda^2+4\lambda+3)(\lambda+5)\\ &= \lambda^3+4\lambda^2+3\lambda+5\lambda^2+20\lambda+15\\ &= \lambda^3+9\lambda^2+23\lambda+15\end{aligned}\tag{1-7}$$

$$\delta_2=9,\ \delta_1=23,\ \delta_0=15\tag{1-8}$$

であり，

$$\begin{aligned}\Delta_A &= A_e^3+\delta_2A_e^2+\delta_1A_e+\delta_0I\\ &= A_e^3+9A_e^2+23A_e+15I\end{aligned}\tag{1-9}$$

ここで，

$$A_e^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\tag{1-10}$$

$$A_e^3=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\tag{1-11}$$

よって，

$$\begin{aligned}\Delta_A &= \begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\\ &\quad +23\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}+15\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}8 & 8 & 0\\ -8 & -8 & 0\\ -22 & -7 & 15\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1-12}$$

となる。可制御性行列は，

$$\begin{aligned}V_{ce} &= \begin{bmatrix}B_e & A_eB_e & A_e^2B_e\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1-13}$$

から

$$
\begin{aligned}
K_e &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V_{ce}^{-1} \Delta_A \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \\ -22 & -7 & 15 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -22 & -7 & 15 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}14)
\end{aligned}
$$