2021 年度 計測制御工学 前期 第 9 回レポート (模範解答)

EM 専攻 1 年 番号 ________ 氏名 ________________________

【問題 1】

零入力の線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

が与えられたとき，$Q = I$ としたリアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q$$

の解 $P = P^T$ が正定であるかどうかを調べて，漸近安定性を判別せよ。

【解答】

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & p_{11}+p_{12} \\ 2p_{22} & p_{12}+p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_{12} & 2p_{22} \\ p_{11}+p_{12} & p_{12}+p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

$$\begin{bmatrix} 4p_{12} & p_{11}+p_{12}+2p_{22} \\ p_{11}+p_{12}+2p_{22} & 2(p_{12}+p_{22}) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって，

$$4p_{12} = -1 \tag{1-3}$$

$$p_{11} + p_{12} + 2p_{22} = 0 \tag{1-4}$$

$$2(p_{12} + p_{22}) = -1 \tag{1-5}$$

(2-5) 式より $p_{12} = -0.25$。(2-7) 式へ代入

$$\begin{aligned} 2(-0.25 + p_{22}) &= -1 \\ -0.25 + p_{22} &= -0.5 \\ p_{22} &= -0.25 \end{aligned} \tag{1-6}$$

(2-6) 式へ代入

$$p_{11} - 0.25 - 0.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{11} = 0.75 \tag{1-7}$$

よって，P は

$$P = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

となる。主座小行列は

$$0.75 > 0 \tag{1-9}$$

$$\begin{aligned} |P| &= 0.75 \times -0.25 - 0.25^2 \\ &= \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{16} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{4} < 0 \end{aligned} \tag{1-10}$$

となるため，行列 P は正定でない。よって，<u>漸近安定でない。</u>

【問題 2】

【問題 1】において，$Q_0 = [1\ 0]$ としたリアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q_0^T Q_0$$

の解 $P = P^T$ が正定であるかどうかを調べて，漸近安定性を判別せよ。また，(Q_0, A) の可観測性を示せ。

【解答】

可観測性を調べる。

$$V_o = \begin{bmatrix} Q_o \\ Q_o A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

よって，$\mathrm{rank} V_o = 2$ より <u>可観測</u> である。

$$Q_0^T Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

より，

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & p_{11}+p_{12} \\ 2p_{22} & p_{12}+p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_{12} & 2p_{22} \\ p_{11}+p_{12} & p_{12}+p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

$$\begin{bmatrix} 4p_{12} & p_{11}+p_{12}+2p_{22} \\ p_{11}+p_{12}+2p_{22} & 2(p_{12}+p_{22}) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって，

$$4p_{12} = -1 \tag{2-5}$$

$$p_{11} + p_{12} + 2p_{22} = 0 \tag{2-6}$$

$$2(p_{12} + p_{22}) = 0 \tag{2-7}$$

(2-5) 式より $p_{12} = -0.25$。(2-7) 式へ代入

$$\begin{aligned} 2(-0.25 + p_{22}) &= 0 \\ -0.25 + p_{22} &= 0 \\ p_{22} &= 0.25 \end{aligned} \tag{2-8}$$

(2-6) 式へ代入

$$p_{11} - 0.25 + 0.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{11} = -0.25 \tag{2-9}$$

よって，P は

$$P = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \tag{2-10}$$

となる。主座小行列は

$$-0.25 > 0 \tag{2-11}$$

$$\begin{aligned} |P| &= -0.25 \times 0.25 - 0.25^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= -\frac{2}{16} - \frac{1}{8} < 0 \end{aligned} \tag{2-12}$$

となるため，行列 P は正定でない。よって，漸近安定でない。