2021 年度 計測制御工学 前期 第 10 回レポート (模範解答)

EM 専攻 1 年 番号 ________ 氏名 ____________________

【問題 1】

1 慣性システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

において，評価関数

$$J = \int_0^\infty \left(x(t)^T Q x(t) + ru(t)^2\right) dt$$

の重みが次式により与えられたとき，以下の問いに答えよ。

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\quad r = 1$$

(1) リカッチ方程式の正定対称解 P を求めよ。

$$PA + A^T P - \frac{1}{r} Pbb^T P + Q = 0$$

ただし，P の要素はすべて正となることを用いてよい。

(2) コントローラのゲイン k を求めよ。

$$u = kx(t),\ k = -\frac{1}{r} b^T P$$

【解答】

(1) $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0 \tag{1-1}$$

式整理すると

$$\begin{bmatrix} -p_{12} - p_{12} & p_{11} - 2p_{12} - p_{22} \\ -p_{22} + p_{11} - 2p_{12} & 2(p_{12} - 2p_{22}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0 \tag{1-2}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{12} - p_{12}^2 + 3 & p_{11} - 2p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} \\ p_{11} - 2p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} & 2(p_{12} - 2p_{22}) - p_{22}^2 + 3 \end{bmatrix} = 0 \tag{1-3}$$

となる。(1,1) 要素から

$$-2p_{12} - p_{12}^2 + 3 = 0 \tag{1-4}$$
$$p_{12}^2 + 2p_{12} - 3 = 0 \tag{1-5}$$
$$(p_{12} + 3)(p_{12} - 1) = 0 \tag{1-6}$$

$p_{12} > 0$ より $\underline{p_{12} = 1}$ となる。

(2,2) 要素から

$$2(p_{12} - 2p_{22}) - p_{22}^2 + 3 = 0 \tag{1-7}$$
$$2(1 - 2p_{22}) - p_{22}^2 + 3 = 0 \tag{1-8}$$
$$p_{22}^2 + 4p_{22} - 5 = 0 \tag{1-9}$$
$$(p_{22} + 5)(p_{22} - 1) = 0 \tag{1-10}$$

$p_{22} > 0$ より $\underline{p_{22} = 1}$ となる。

(1,2) 要素から

$$\begin{aligned} p_{11} - 2p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} &= 0 \\ p_{11} - 2 - 1 - 1 &= 0 \\ p_{11} &= 4 \end{aligned} \tag{1-11}$$

より，$\underline{p_{11} = 4}$ となる。よって，P は

$$\underline{P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \tag{1-12}$$

となる。t

(2) k は

$$k = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{-\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} \tag{1-13}$$

となる。