2023年6月7日
河合康典

2023年度 計測制御工学 中間試験 (模範解答)
2023年6月7日 15,2限 (8:55-10:15)

注意：途中計算が解答欄に記入されていない場合は減点とする。

[問題 1] (配点 10 点)*学生の到達目標 (1),(2)

次の線形システムの状態空間表現から伝達関数 $P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ を求めることで，最小実現であるか答えよ。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

[解答]

$$\begin{aligned} P(s) &= C\,(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+3)}\begin{bmatrix} 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s}{s(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+3} \end{aligned} \tag{1-1}$$

5点

A は 2 次で，伝達関数は 1 次なので，最小実現ではない。

5点

[問題 2] (配点 15 点 ((1):10 点,(2):5 点))
学生の到達目標 (1),(2)

次のシステム

$$3\ddot{z}(t) = -6z(t) - \dot{z}(t) + 3f(t)$$

において，z は台車の位置，$\dot{z}$ は台車の速度を表している。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

(1) 次の状態空間表現の A，B，C，D を答えよ。

$$u(t) = f(t),\ y(t) = z(t),\ x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

(2) 次の状態空間表現の C，D を答えよ。

$$u(t) = f(t),\quad y(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \quad x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

[解答]

(1)

$$\ddot{z}(t) = -2z(t) - \frac{1}{3}\dot{z}(t) + f(t) \tag{2-1}$$

より，次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t) \tag{2-2}$$

よって，

4点　　2点

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 0 \tag{2-4}$$

2点　　2点

(2)

$$y(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{2-5}$$

よって，

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-6}$$

Cが合っていれば5点　　Dだけ合っていれば2点

[問題 3] (配点 20 点)*学生の到達目標 (1),(2)

次のシステムにおいて，入力 $f(t)$，出力 $y = x_2$ となるようにブロック線図を描け。

$$\ddot{x}_1(t) = -2\dot{x}_1(t) - x_2(t) - x_1(t) + f(t)$$
$$2\ddot{x}_2(t) = -2\dot{x}_2(t) + x_1(t)$$

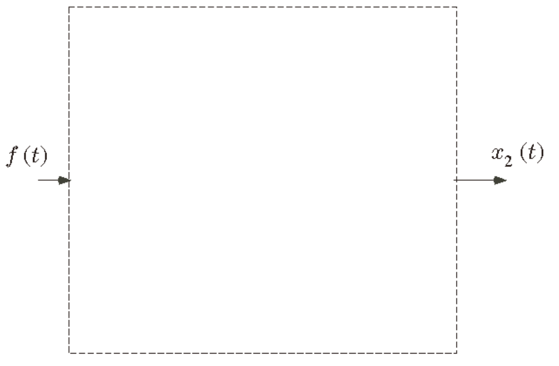

図 3-1: ブロック線図

[解答]

x_2 は

$$\ddot{x}_2(t) = -\dot{x}_2(t) + \frac{1}{2}x_1(t) \tag{3-1}$$

のようになる。ブロック線図は図 3-2 のようになる。

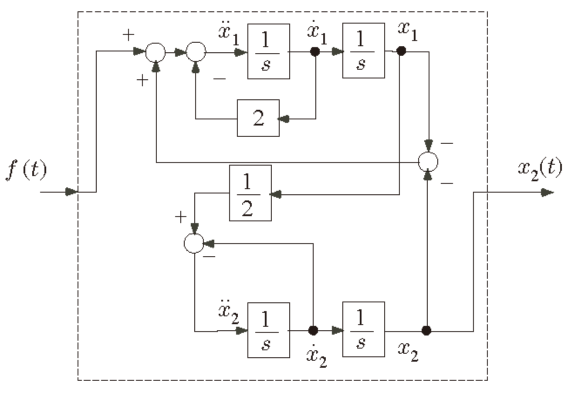

図 3-2: ブロック線図

s でブロック線図を作った場合は×

一部配線間違え -5点

[問題 4] (配点 15 点)*学生の到達目標 (4)

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

における A, B が以下のように与えられたとき，可制御性を可制御性行列を用いて判別して，可制御または可制御ではないか答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \tag{4-1}$$

5点 5点

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} = 2 \tag{4-2}$$

よって，<u>可制御である。</u> 5点

(別解)

$$\begin{vmatrix} B & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \tag{4-3}$$

よって，<u>可制御である。</u>

[問題 5] (配点 20 点)*学生の到達目標 (4)

線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について，$A_{cl} := A + BK$ の固有値 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2$ を $p_1 = -3$, $p_2 = -5$ とする次式の状態フィードバック形式のコントローラ k_1，k_2 を答えよ。

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t),\quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

[解答]

A_{cl} は

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 + k_1 & -7 + k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5-1}$$

A_{cl} の特性方程式は

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_{cl}| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 6 - k_1 & \lambda + 7 - k_2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 7 - k_2) + (6 - k_1) \\ &= \lambda^2 + (7 - k_2)\lambda + 6 - k_1 \end{aligned} \tag{5-2}$$

となる。よって

$$7 - k_2 = -(p_1 + p_2) \tag{5-3}$$

$$6 - k_1 = p_1 p_2 \tag{5-4}$$

となるため (5-3) 式から

$$\begin{aligned} k_2 &= 7 + p_1 + p_2 \\ &= 7 - 3 - 5 = \underline{-1} \end{aligned} \tag{5-5}$$

(5-4) 式から

$$\begin{aligned} k_1 &= 6 - p_1 p_2 \\ &= 6 - (-3)(-5) = \underline{-9} \end{aligned} \tag{5-6}$$

となる。

計算ミス: -2点×個数

[問題 6] (配点 20 点)*学生の到達目標 (3)

線形システム

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

において，遷移行列 e^{At} を答えよ。ただし，付録のラプラス変換表を用いてよい。

[解答] ラプラス変換を用いる場合

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s + 7 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s(s+7) + 6} \begin{bmatrix} s + 7 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 7s + 6} \begin{bmatrix} s + 7 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+6)} \begin{bmatrix} s + 7 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6-1}$$

10点

と分解でき，係数行列 K_1，K_2 を用いて次のように分解できる。

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s+1} K_1 + \frac{1}{s+6} K_2 \tag{6-2}$$

係数行列 K_1，K_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} K_1 &= (s+1)(sI - A)^{-1}\big|_{s=-1} \\ &= \frac{1}{s+6} \begin{bmatrix} s + 7 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6-3}$$

5点

$$\begin{aligned} K_2 &= (s+6)(sI - A)^{-1}\big|_{s=-6} \\ &= \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s + 7 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}\Bigg|_{s=-6} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6-4}$$

5点

遷移行列は次のようになる。

$$\underline{e^{At} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} e^{-6t}} \tag{6-5}$$

対角化を用いる場合

固有値を求める。

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 6 & s + 7 \end{vmatrix} = s(s+7) + 6 \\ &= s^2 + 7s + 6 = (s+1)(s+6) \end{aligned} \tag{6-6}$$

ゆえに，固有値は以下のようになる。

$$\lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = -6 \tag{6-7}$$

固有ベクトル v_1，v_2 を定義する。λ_1 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 I - A)v_1 = 0\\ &\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6-8}$$

よって，固有ベクトル v_1 は次のようになる。

$$v_1 = \alpha\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \tag{6-9}$$

λ_2 に対する固有ベクトルを求める。

$$\begin{bmatrix}-6 & -1\\ 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{6-10}$$

よって，固有ベクトル v_2 は次のようになる。

$$v_2 = \beta\begin{bmatrix}1\\ -6\end{bmatrix} \tag{6-11}$$

ここで，

$$S = \begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\alpha & -6\beta\end{bmatrix} \tag{6-12}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-6t}\end{bmatrix} \tag{6-13}$$

となるから

$$\begin{aligned}e^{At} &= Se^{\Lambda t}S^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\alpha & -6\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-6t}\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{5\alpha\beta}\right)\begin{bmatrix}-6\beta & -\beta\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}\\ &= -\frac{1}{5\alpha\beta}\begin{bmatrix}\alpha e^{-t} & \beta e^{-6t}\\ -\alpha e^{-t} & -6\beta e^{-6t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\beta & -\beta\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}\\ &= -\frac{1}{5\alpha\beta}\begin{bmatrix}-6\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-6t} & -\alpha\beta e^{-t} + \alpha\beta e^{-6t}\\ 6\alpha\beta e^{-t} - 6\alpha\beta e^{-6t} & \alpha\beta e^{-t} - 6\alpha\beta e^{-6t}\end{bmatrix}\\ &= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-6e^{-t} + e^{-6t} & -e^{-t} + e^{-6t}\\ 6e^{-t} - 6e^{-6t} & e^{-t} - 6e^{-6t}\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}6 & 1\\ -6 & -1\end{bmatrix}e^{-t} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -6 & -6\end{bmatrix}e^{-6t}\end{aligned} \tag{6-14}$$