

第1章 古典制御理論から現代制御理論へ

- 1.1 高次システムに対する古典制御理論の限界
- 1.2 現代制御理論における高次システムの取り扱い

キーワード : SISO, MIMO, 状態方程式, 出力方程式

学習目標 : 古典制御理論で困難な多入力多出力システムを容易にする現代制御理論の重要性を理解する。

2

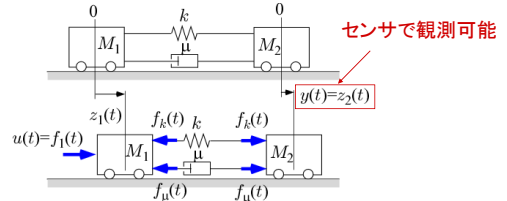
1 古典制御理論から現代制御理論へ

1.1 高次システムに対する古典制御理論の限界

[例 1.1]

台車2の情報のみ利用

$$\begin{cases} M_1 \dot{z}_1(t) = u(t) - k(z_1(t) - y(t)) - \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{y}(t)) & (1.1a) \\ M_2 \ddot{y}(t) = \frac{f_k(t)}{k(z_1(t) - y(t)) + \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{y}(t))} & (1.1b) \end{cases}$$



3

$$M_2 \ddot{y}(t) = k(z_1(t) - y(t)) + \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{y}(t)) \quad (1.1b)$$

(1.1b) 式をラプラス変換

$$\begin{aligned} M_2 y(s)s^2 &= k(z_1(s) - y(s)) + \mu(z_1(s) - y(s))s \\ (M_2 s^2 + \mu s + k) y(s) &= (\mu s + k) z_1(s) \\ z_1(s) &= \frac{M_2 s^2 + \mu s + k}{\mu s + k} y(s) \quad (1.1c) \end{aligned}$$

$$M_1 \dot{z}_1(t) = u(t) - k(z_1(t) - y(t)) - \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{y}(t)) \quad (1.1a)$$

(1.1a) 式をラプラス変換

$$\begin{aligned} M_1 z_1(s)s &= u(s) - k(z_1(s) - y(s)) - \mu(z_1(s) - y(s))s \\ (M_1 s^2 + \mu s + k) z_1(s) &= u(s) + (\mu s + k) y(s) \end{aligned}$$

4

$$z_1(s) = \frac{M_2 s^2 + \mu s + k}{\mu s + k} y(s) \quad (1.1c)$$

$$(M_1 s^2 + \mu s + k) z_1(s) = u(s) + (\mu s + k) y(s)$$

(1.1c) 式を代入

$$\begin{aligned} \frac{(M_1 s^2 + \mu s + k)(M_2 s^2 + \mu s + k)}{\mu s + k} y(s) - u(s) + (\mu s + k) y(s) \\ = \frac{s^2 (M_1 M_2 s^2 + M_1 (\mu s + k) + M_2 (\mu s + k))}{\mu s + k} y(s) - u(s) \end{aligned}$$

よって

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\mu s + k}{s^2 (M_1 M_2 s^2 + M_1 (\mu s + k) + M_2 (\mu s + k))}$$

値を代入すると

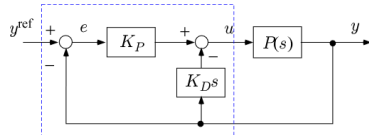
$$P(s) = \frac{s + 2}{s^2 (0.5s^2 + 0.5(s + 2) + (s + 2))} = \frac{2s + 4}{s^2 (s^2 + 3s + 6)}$$

5

P-D コントローラ

$$u(t) = k_P e(t) - k_D \dot{y}(t)$$

$$e(t) = y^{\text{ref}}(t) - y(t)$$



[MATLAB/Scilab 演習]

[例 1.2] コントローラのゲイン(北森の方法)

$$k_P = \frac{3\omega_n^2}{2}, \quad k_D = 3\zeta\omega_n, \quad \zeta = 0.7, \quad \omega_n = 0.5, \quad 2$$

目標値

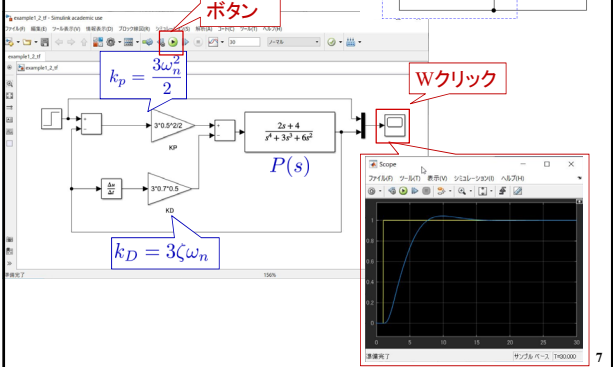
$$y^{\text{ref}}(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

6

[MATLAB 演習]

example1_2_tf.mdl

$$\omega_n = 0.5, \quad \zeta = 0.7$$



7

[MATLAB演習]
example_2_tf.mdl
 $\omega_n = 2, \zeta = 0.7$

Wクリック

Wクリックして $3*0.7*2$ に変更する

Gain
要素単位のゲイン ($y = K*u$), または行列ゲイン ($y = K*u$, または $y = u*K$)
メイン 信号属性 パラメータ属性
ゲイン
3*0.5^2/2
変数: 要素単元 (K*u)
OK(O) キャンセル(C) ヘルプ(H) 適用(A)

3*2²/2
に変更する

8

[MATLAB演習]

スタートボタン

振動数が増えている

9

[Scilab演習]
example_2_tf.zcos
 $\omega_n = 0.5, \zeta = 0.7$

スタートボタン

Wクリック

Wクリックして $3*0.7*2$ に変更する

10

[Scilab演習]
example_2_tf.zcos
 $\omega_n = 2, \zeta = 0.7$

Wクリック

Wクリックして $3*0.7*2$ に変更する

3*2²/2
に変更する

11

[Scilab演習]

スタートボタン

振動数が増えている

12

$\omega_n = 0.5, \zeta = 0.7$

$\omega_n = 2, \zeta = 0.7$

ω_n を大きくすると不安定になる。

制御対象
$$P(s) = \frac{2s + 4}{s^2(s^2 + 3s + 6)} = \frac{2s + 4}{s^4 + 3s^3 + 6s^2}$$

P-D コントローラ
$$u(t) = k_P e(t) - k_D \dot{y}(t)$$

4次

2つしかパラメータない (極を任意に設定できない)

13

1 古典制御理論から現代制御理論へ
 1.2 現代制御理論における高次システムの取り扱い

[例 1.3]
 台車2に加えて、台車1の状態を利用
 P-D コントローラ

$$u(t) = \underbrace{k_{P1}e_1(t) - k_{D1}\dot{z}_1(t)}_{\text{台車1のP-D制御}} + \underbrace{k_{P2}e_2(t) - k_{D2}\dot{z}_2(t)}_{\text{台車2のP-D制御}}$$

$$e_1(t) = y^{\text{ref}}(t) - z_1(t), \quad e_2(t) = y^{\text{ref}}(t) - z_2(t)$$

14

$$u(t) = \underbrace{k_{P1}(y^{\text{ref}}(t) - z_1(t)) - k_{D1}\dot{z}_1(t)}_{\text{台車1のP-D制御}} + \underbrace{k_{P2}(y^{\text{ref}}(t) - z_2(t)) - k_{D2}\dot{z}_2(t)}_{\text{台車2のP-D制御}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -k_{P1} & -k_{D1} & -k_{P2} & -k_{D2} \end{bmatrix}}{k} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} + \frac{(k_{P1} + k_{P2})}{h} y^{\text{ref}}(t)$$

$$= kx(t) + hy^{\text{ref}}(t)$$

台車1の状態
 台車2の状態
 $x(t)$

コントローラのゲイン(最適レギュレータ)
 $k = [-1.90 \quad -1.71 \quad -5.84 \quad -4.45], \quad h = 7.75$

4つの設計パラメータ (極を任意に設定できる)

15

[MATLAB演習]
 example1_3.mdl

最適レギュレータ

P-D制御

16

17

最適レギュレータ

P-D制御

同程度の速応性にも関わらず振動抑制されている

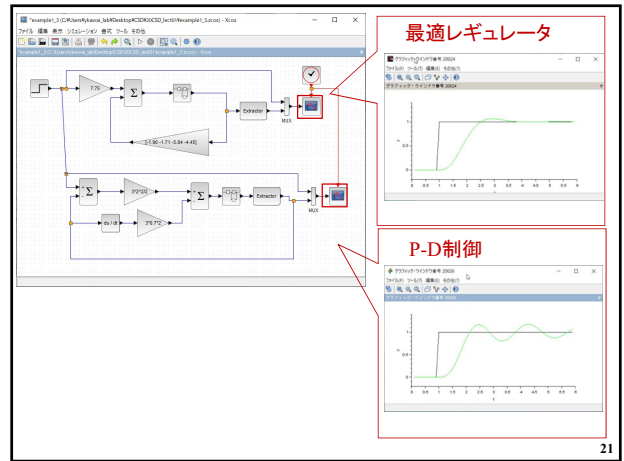
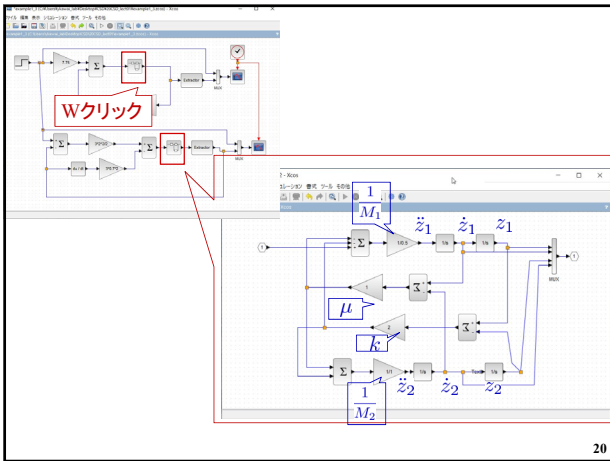
18

[Scilab演習]
 example1_3.zcos

最適レギュレータ

P-D制御

19



制御対象

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{状態方程式}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \text{出力方程式}$$

状態空間表現

$$x(t) = [z_1(t) \quad \dot{z}_1(t) \quad z_2(t) \quad \dot{z}_2(t)]^T$$

コントローラ

$$u(t) = Kx(t) + Hy^{\text{ref}}(t)$$

$$y^{\text{ref}}(t) = y_1^{\text{ref}}(t)$$

$$K = [k_{11} \quad k_{12} \quad k_{13} \quad k_{14}]$$

$$H = h_{11}$$

22

4つの情報を観測するために伝達関数ではなく、微分方程式から考える

$$M_1 \ddot{z}_1(t) = u(t) - k(z_1(t) - y(t)) - \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{y}(t))$$

$$\ddot{z}_1(t) = \frac{1}{M_1} (u(t) - k(z_1(t) - y(t)) - \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{y}(t)))$$

積分を用いる (微分ではない)

23

[計算演習]

ブロック線図で描け

$$M_2 \ddot{y}(t) = k(z_1(t) - y(t)) + \mu(\dot{z}_1(t) - \dot{y}(t))$$

↑ ↑
z₁ z₁

24

[模範解答]

25

第1章 古典制御理論から現代制御理論へ

- 1.1 高次システムに対する古典制御理論の限界
- 1.2 現代制御理論における高次システムの取り扱い

キーワード：SISO, MIMO, 状態方程式, 出力方程式

学習目標：古典制御理論で困難な多入力多出力システムを容易にする現代制御理論の重要性を理解する。

26