

2024年度計測制御工学前期第2回レポート(模範解答)

EM専攻1年番号 _____ 氏名 _____

【問題1】 次のシステムにおいて, 入力 $u(t) = f(t)$, 出力 $y(t) = \dot{z}(t)$, $x(t) = [z(t), \dot{z}(t)]^T$ としたとき, 状態空間表現 (2.7) 式を求めよ。

$$2\ddot{z}(t) = f(t) - 4z(t) - 6\dot{z}(t) \quad (1)$$

【解答】

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{2}u(t) - 2z(t) - 3\dot{z}(t) \quad (2)$$

より, 次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

【問題2】 【問題1】のシステムをラプラス変換することによって, 伝達関数 $P(s) = \frac{z(s)}{u(s)}$ を求めて, 極を答えよ。

【解答】

ラプラス変換すると

$$2s^2 z(s) = u(s) - 4z(s) - 6sz(s) \quad (5)$$

となる。よって, 伝達関数は

$$\begin{aligned} (2s^2 + 6s + 4) z(s) &= u(s) \\ \frac{u(s)}{z(s)} &= \frac{1}{2s^2 + 6s + 4} \\ &= \frac{1}{2(s^2 + 3s + 2)} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。極は, 伝達関数の分母多項式が0になればよいので

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2) \quad (7)$$

から, -1, -2 である。

【問題 3】 【問題 1】の状態空間表現から固有値を求めよ。

【解答】

固有値は、

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s(s+3) + 2 \\ &= (s+1)(s+2) \end{aligned} \quad (8)$$

より、-1, -2 である。

【問題 4】 下記を用いて【問題 1】の状態空間表現から伝達関数 $P(s)$ を求めよ。

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (9)$$

【解答】

$$\begin{aligned} P(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\frac{1}{2}s}{s(s+3)+2} \\ &= \frac{s}{2(s^2+3s+2)} \end{aligned} \quad (10)$$